

Jiří Zmatlík¹, Otto Pastor²

Metodika hodnocení účinnosti regulačních diagramů ve výrobních a dopravních systémech

Klíčová slova: *účinnost regulačních diagramů, silová funkce, délka přeběhu a její rozdělení pravděpodobnosti, průměrná délka přeběhu a směrodatná odchylka délky přeběhu u různých typů regulačních diagramů*

Úvod

Článek se zabývá metodikou hodnocení účinnosti a senzitivity různých typů regulačních diagramů sledující chování výrobních a nevýrobních procesů s cílem zajistit předvídatelné chování a statistickou stabilitu procesu. Pro hodnocení účinnosti se užívají silová funkce, operativní/operační funkce, distribuční funkce rozložení délky přeběhu s charakteristikami průměrná délka přeběhu a směrodatná odchylka délky přeběhu, které jsou odvozeny matematicky. Dále je článek zaměřen na filozofii konstrukce CUSUM diagramů a monitorování výrobního procesu CUSUM a Shewhartovým regulačním diagramem a srovnání účinnosti a výkonnosti zmíněných diagramů se závěry a doporučeními pro praktické využití.

1 Účinnost regulačních diagramů

Regulační diagramy sledující polohu a variabilitu znaku jakosti či znaků jakosti výrobních a nevýrobních procesů s cílem identifikovat a specifikovat vymezené/specifické příčiny variability, charakterizovat statisticky stabilní stav procesů s předpověditelným chováním v čase. Různé typy regulačních diagramů mají různou účinnost, resp. citlivost, cílem je, aby pravděpodobnost identifikace falešných signálů zastavit proces byla nízká. Z těchto důvodů se využívají následující charakteristiky a funkce popisující účinnost a citlivost regulačních diagramů:

1. Operativní/Operační charakteristika (OC)
2. Silová funkce, komplement Operativní charakteristiky (PF)
3. Rozdělení pravděpodobnosti délky přeběhu včetně charakteristik (RL)

¹ Ing. Jiří Zmatlík, Ph.D. (*1969) působí v oblasti aplikované matematiky a statistiky v rámci řízení podniku. Obhájil disertační práci v oblasti statistického řízení jakosti. Působí na České zemědělské univerzitě v Praze na Provozně ekonomické fakultě na katedře statistiky. Přednáší a cvičí předměty aplikované statistiky. Zabývá se zejména statistickými modely v zemědělství a metodami aplikovatelnými pro zlepšování jakosti.

² prof. Dr. Ing. Otto Pastor, CSc. (*1948) je předním odborníkem v oblasti teorie dopravy a dopravních systémů jako součást logistických procesů. Působí jako profesor v oboru Management a technologie dopravy na ČVUT v Praze na Fakultě dopravní v Ústavu logistiky a managementu dopravy. Zabývá se zejména rozhodovacími procesy, aplikovanými matematickými modely v dopravě a logistice se zaměřením na ekonomicko-technologickou podstatu problematiky.

4. Průměrná délka přeběhu (ARL)
5. Směrodatná odchylka délky přeběhu (SDRL)

Operativní/Operační charakteristika (OC)

Operativní charakteristika ($OC, \beta(n, \delta)$) je pravděpodobnost, že nebude detekována skoková změna polohy a variability procesu na jednom vzorku v regulačním diagramu jako funkce změny z nominální hodnoty polohy a variability.

Silová funkce

Silová funkce (PF) je pravděpodobnost, že skoková změna polohy a případně variability bude detekována v regulačním diagramu příslušného typu, má opačnou vypovídací schopnost než operativní/operační charakteristika. Vztahy mezi oběma charakteristikami jsou dány rovnicí uvedenou níže.

$$PF = 1 - OC = 1 - \beta(n, \delta)$$

Rozdělení pravděpodobnosti délky přeběhu

Délka přeběhu je definována jako počet výběrů vedoucí k signálu nebo-li počet logických podskupin od podskupiny, u které došlo ke skokové změně polohy nebo variability procesu, až po skupinu, u které byla změna detekována regulačním diagramem příslušného typu. Rozdělení pravděpodobnosti délky přeběhu je geometrické, jsou definovány popisné charakteristiky průměrná délka přeběhu či směrodatná odchylka délky přeběhu. Délka přeběhu je tedy náhodná veličina s geometrickým rozdělením pravděpodobnosti.

2 Operativní charakteristika polohy procesu – průměr \bar{X} Shewartova regulačního diagramu

Myšlenka odvození vztahu vychází z toho, že poloha procesu při skokové změně je uvnitř stanovených regulačních mezí. Definujeme zmíněnou pravděpodobnost. Vzhledem k tomu, že výběrové průměry mají symetrické normální rozdělení pravděpodobnosti, využijeme distribuční funkci normovaného normálního rozdělení. Výsledky odvození jsou patrné z níže uvedených vztahů.

$$OC = \beta(n, \delta) = \Phi(z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n})$$

$$\beta(n, \delta) = P((LCL \leq \bar{X} \leq UCL) | \mu = \mu_0 + \delta\sigma_0)$$

$$\beta(n, \delta) \cong \Phi(z_{\alpha/2} - |\delta|\sqrt{n})$$

μ_0	střední hodnota procesu
σ_0	směrodatná odchylka procesu
$\mu = \mu_0 + \delta\sigma_0$	specifikace skokové změny střední hodnoty procesu
$z_{\alpha/2}$	Kvantil normovaného normálního rozdělení
UCL, LCL	regulační meze
Φ	distribuční funkce $N(0,1)$
n	velikost podskupiny

3 Operativní charakteristika směrodatné odchylky procesu – S Shewhartův regulační diagram

Výchozí myšlenkou je S Shewhartův regulační diagram s regulačními mezemi ve vzdálenosti 6 směrodatných odchylek procesu. Předpokládá se, že v regulačním diagramu proběhne skoková změna σ směrodatné odchylky procesu z nominální hodnoty σ_0 na skokovou změnu $\delta\sigma_0$.

Pro $\delta > 1$ je operativní charakteristika dána následujícími níže uvedenými rovnicemi:

$$\beta(n, \delta) = P\left\{ \frac{(n-1)s^2}{\delta^2 \sigma_0^2} \leq \frac{(n-1)B_6^2}{\delta^2} \mid \sigma = \delta\sigma_0 \right\}$$
$$\beta(n, \delta) = \chi_{n-1}^2 \left\{ \frac{(n-1)B_6^2}{\delta^2} \right\}$$

Pro $\delta < 1$ je operativní charakteristika dána následující níže uvedenou rovnicí:

$$\beta(n, \delta) = 1 - \chi_{n-1}^2 \left\{ \frac{(n-1)B_5^2}{\delta^2} \right\}$$

Pro $\delta = 1$ (statisticky stabilní proces) je operativní charakteristika specifikována rovnicemi uvedenými níže:

$$\beta(n, 1) = P\{B_5\sigma_0 \leq s \leq B_6\sigma_0; \sigma = \sigma_0\}$$
$$\beta(n, 1) = P\left\{ (n-1)B_5^2 \leq \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} \leq B_6^2(n-1) \right\}$$
$$\beta(n, 1) = \chi_{n-1}^2 \left\{ (n-1)B_6^2 \right\} - \chi_{n-1}^2 \left\{ (n-1)B_5^2 \right\}$$

$B_5 B_6$ konstanty odhadů mezí S diagramů

χ^2 Distribuční funkce Chí kvadrát s příslušnými stupni volnosti

s směrodatná odchylka

4 Operativní charakteristika pro Shewhartův regulační diagram s pravděpodobnostními mezemi

U stabilních výrobních a nevýrobních procesů je operativní charakteristika dána následující rovnicí:

$$\beta(n, \delta) = 1 - \alpha_L - \alpha_U$$

Pokud $\delta > 1$, pak lze operativní charakteristiku vyjádřit vztahem viz níže

$$\beta(n, \delta) = \chi_{n-1}^2 \left(\frac{\chi_{\alpha_U}^2}{\delta^2} \right)$$

Pokud $\delta < 1$, pak lze operativní charakteristiku vyjádřit vztahem viz níže

$$\beta(n, \delta) = 1 - \chi_{n-1}^2 \left(\frac{\chi_{1-\alpha_U}^2}{\delta^2} \right)$$

α_L pravděpodobnost, že bod je pod dolní regulační mezí

α_U pravděpodobnost, že bod je nad horní regulační mezí

Obecně požadujeme u operativní charakteristiky, aby měla pro stabilní procesy vysokou hodnotu pravděpodobnosti a při změně parametrů vedoucí k nestabilnímu a nepředvídatelnému chování procesu měla hodnotu pravděpodobnosti nízkou.

5 Distribuční funkce délky přeběhu

Pokud individuální hodnoty v regulačním diagramu jsou nezávislé a identicky distribuovány a regulační meze jsou konstantní, náhodná veličina Y , zvaná délka přeběhu, má geometrické rozdělení/rozložení pravděpodobnosti. Dále níže uvedené rovnice specifikují střední hodnotu a směrodatnou odchylku délky přeběhu u geometrického rozdělení pravděpodobnosti s využitím operativní charakteristiky a silové funkce.

$$P(Y = y) = [\beta(n, \delta)]^{y-1} \times [1 - \beta(n, \delta)] = [\beta(n, \delta)]^{y-1} \times PF(n, \delta)$$

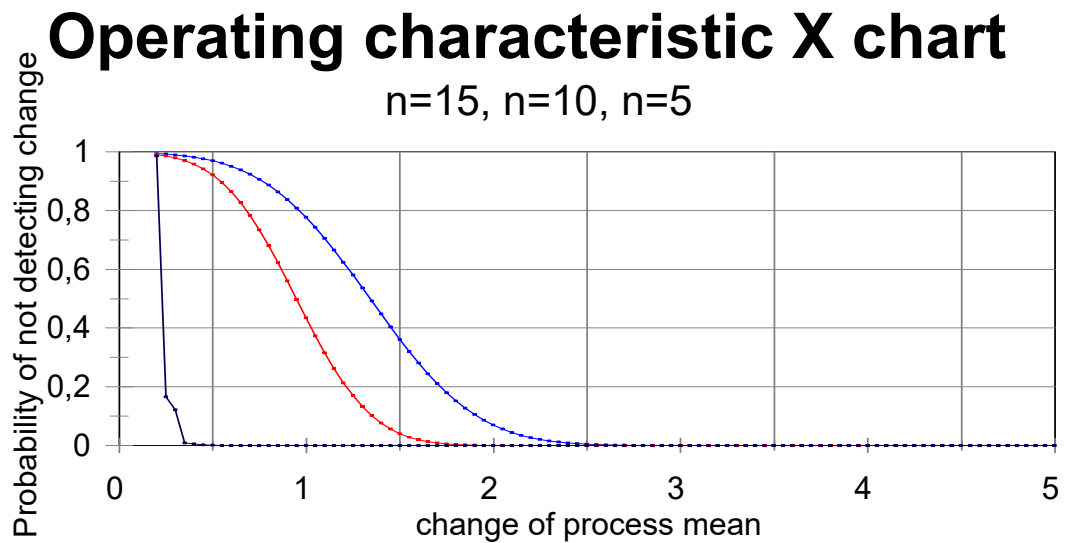
$$E(Y) = ARL(n, \delta) = \frac{1}{1 - \beta(n, \delta)} = \frac{1}{PF(n, \delta)}$$

$$\sigma(Y) = SDRL(n, \delta) = \sqrt{ARL(n, \delta) \times (ARL(n, \delta) - 1)} = \sqrt{\frac{1}{PF(n, \delta)} \times \left(\frac{1}{PF(n, \delta)} - 1 \right)}$$

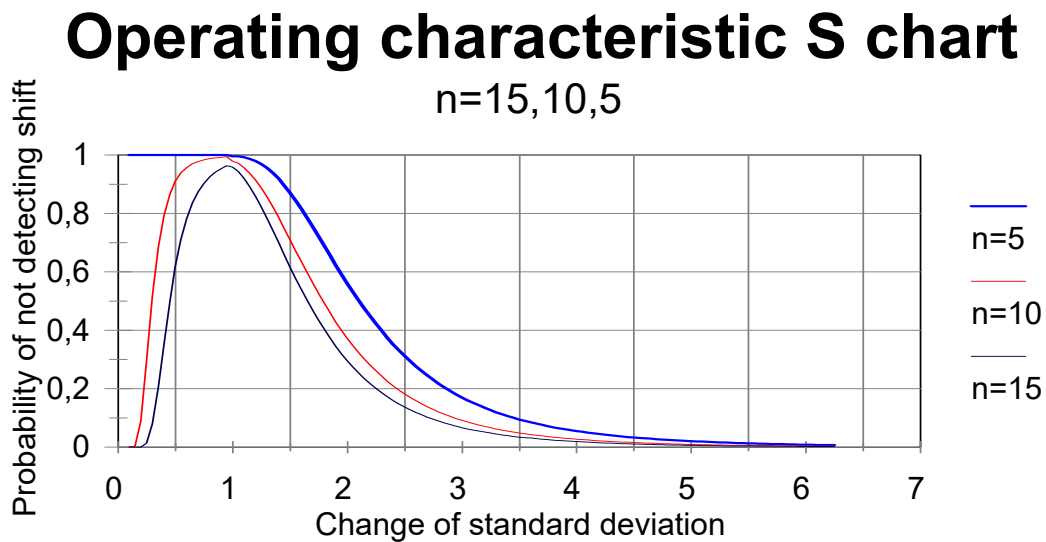
\bar{X} Shewhartovy regulační diagramy mají cca 1 chybný signál na 370 logických podskupin v diagramu. Průměrná délka přeběhu roste s rostoucím n nebo velikostí skokové změny parametru procesu. S Shewhartův regulační diagram má u statisticky stabilních procesů 1 chybný signál na 256 logických podskupin, což je méně než u diagramů pro polohu procesu.

Obecně klasické Shewhartovy diagramy pro polohu procesu mají menší účinnost a citlivost detekovat malé změny procesu s rostoucí velikostí výběru/logické podskupiny. Níže uvedený obrázek specifikuje operativní charakteristiky pro rozsahy logických podskupin 5,10,15. Je třeba též zdůraznit, že vyšší citlivost operativní

charakteristiky je s rostoucí velikostí logické podskupiny, tedy i nákladů na statistickou regulaci procesu.



Obrázek 1: Operativní charakteristika \bar{X} regulačního diagramu pro rozsahy podskupin n=15,10,5.



Obrázek 2: Operativní charakteristika S regulačního diagramu pro rozsahy podskupin n=15,10,5.

6 Diagramy pro kumulativní součty (Cumulative Sum Control Chart)

Shewhartovy \bar{X} a S regulační diagramy mají nižší citlivost detekovat a identifikovat malé změny parametrů procesu – jejich polohy a jejich variability. To odstraňují regulační diagramy pro kumulativní součty. Tyto regulační diagramy mají vyšší účinnost a senzitivitu detekovat a identifikovat malé změny parametrů procesu. Regulační diagramy pro kumulativní součty jsou založené na následujících vztazích a relacích.

$$S_t = \sum_{i=1}^t (\bar{X}_i - K)$$

Objektivně zmíněné diagramy v intervalu sledují růst i pokles kumulativních součtů velmi citlivě, tedy jsou schopny identifikovat speciální příčiny vedoucí k nestabilitě výrobních i nevýrobních procesů. Součet v čase t jsou kumulované hodnoty vzorku od nějaké konstanty K . Dále jsou uvedeny následující rovnice regulačních diagramů pro kumulativní součty.

$$k_s = tg\Theta$$

$$h_s = d \times tg\Theta$$

Veličina k_s se nazývá referenční hodnota, veličina h_s je rozhodovací interval s naměřenými hodnotami. Rovnice pro q_t znamená transformaci pro standardizaci výběrových průměrů s normálním rozdělením pravděpodobnosti.

$$q_t = \frac{\bar{X}_t - \mu_o}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}_t - \mu_o}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Následující vztahy jsou základem testování dvoustranného intervalu:

$$S_t^+(q) = \text{Max}(0, S_{t-1}^+ + q_t - k_s)$$

$$S_t^-(q) = \text{min}(0, S_{t-1}^- + q_t + k_s)$$

$$S_0^+ = S_0^- = 0$$

Výše uvedené vztahy je možné modifikovat do následujících rovnic pro výběrové průměry, tedy pro polohu procesu.

$$K = g \times tg\Theta$$

$$S_k^+ = S_{k-1}^+ + (\bar{x}_k - \mu_o - K) = \sum_{j=1}^k (\bar{x}_j - \mu_o - K)$$

$$S_k^+ = 0$$

$$S_k^- = 0$$

$$S_k^- = S_{k-1}^- + (\bar{x}_k - \mu_o + K) = \sum_{j=1}^k (\bar{x}_j - \mu_o + K)$$

μ_o teoretická střední hodnota polohy procesu
 K parametr ve stejných jednotkách jako je měřená veličina
 g škála

7 Srovnání monitorování polohy procesu klasickým Shewhartovým diagramem a diagramem pro kumulativní součty

Níže uvedená data s normálním rozdělením pravděpodobnosti jsou regulována klasickým Shewhartovým diagramem pro průměr – polohu procesu a regulačním diagramem pro kumulativní součty CUSUM. Data byla sbírána z výrobního procesu, ve kterém došlo k růstu nominální hodnoty na hodnotu 110 skokovou změnou polohy procesu. Tabulka č.1 – Data pro oboustranný test CUSUM regulace zobrazuje průběhy výpočtů pro regulační diagramy kumulovaných součtů. Základem srovnání citlivosti a účinnosti je regulace klasickým Shewhartovým diagramem – viz v textu dále.

Shewhartovy regulační diagramy se stanovenými horními a dolními regulačními mezemi

$$UCL = CL + 3 \times \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}} = 100 + 3 \times \frac{20}{\sqrt{5}} = 126,83$$

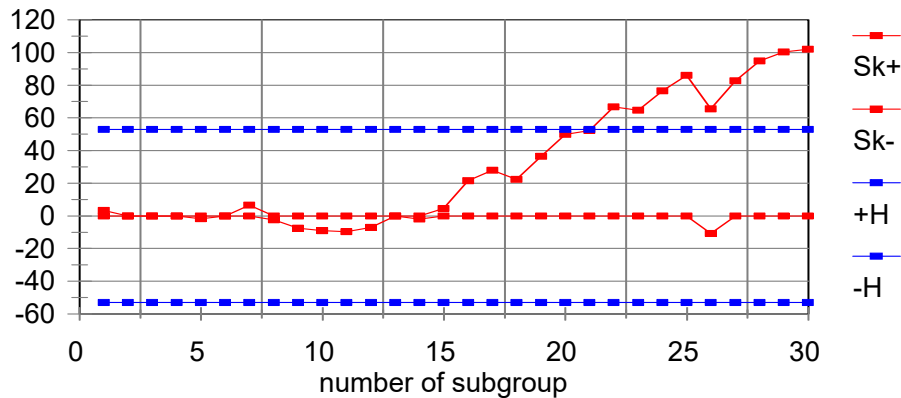
$$LCL = CL - 3 \times \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}} = 100 - 3 \times \frac{20}{\sqrt{5}} = 73,17$$

Tabulka 1: Data a výpočty v CUSUM regulačním diagramu pro oboustranný test.

k	\bar{X}_k	$\bar{X}_k - 100 - 5$	$\bar{X}_k - 100 + 5$	S_k^+	S_k^-
1	108,4	+3,4	+13,4	3,4	0
2	96,2	-8,8	+1,2	0	0
3	96,8	-8,2	+1,8	0	0
4	101,0	-4,0	+6,0	0	0
5	93,4	-11,6	-1,6	0	-1,6
6	101,0	-4,0	+6,0	0	0
7	111,6	+6,6	+16,6	6,6	0
8	92,6	-12,4	-2,4	0	-2,4
9	90,0	-15,0	-5,0	0	-7,4
10	93,4	-11,6	-1,6	0	-9,0
11	94,4	-10,6	-0,6	0	-9,6
12	97,6	-7,4	+2,6	0	-7,0
13	104,8	-0,2	+9,8	0	0
14	93,2	-11,8	-1,8	0	-1,8

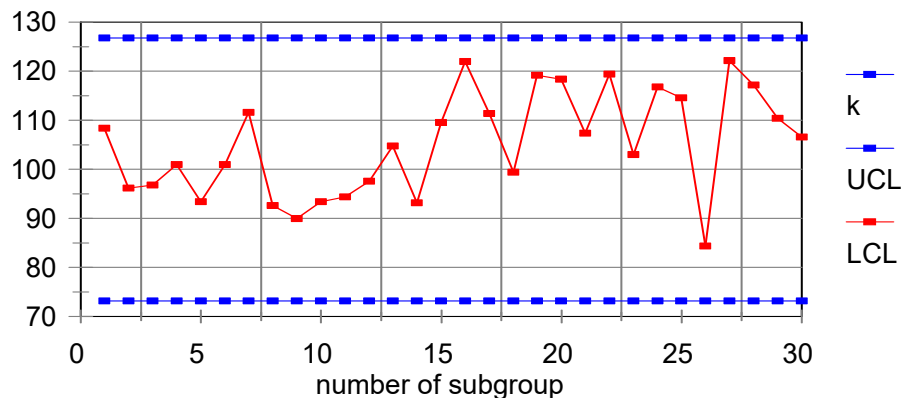
15	109,6	+4,6	+14,6	4,6	0
16	122,0	+17,0	+27	21,6	0
17	111,4	+6,4	+16,4	28,0	0
18	99,4	-5,6	+4,4	22,4	0
19	119,2	+14,2	+24,2	36,6	0
20	118,4	+13,4	+23,4	50,0	0
21	107,4	+2,4	+12,4	52,4	0
22	119,4	+14,4	+24,4	66,8	0
23	103,0	-2,0	+8,0	64,8	0
24	116,8	+11,8	+21,8	76,6	0
25	114,6	+6	+19,6	86,2	0
26	84,4	-20,6	-10,6	65,6	-10,6
27	122,2	+17,2	+27,2	82,8	0
28	117,2	+12,2	+22,2	95,0	0
29	110,4	+5,4	+15,4	100,4	0
30	106,6	+1,6	+11,6	102,0	0

CUSUM Control chart



Obrázek 3: Regulace výrobního procesu pomocí CUSUM regulačního diagramu pro kumulativní součty.

Shewhart X Control Chart



Obrázek 4: Regulace procesu pomocí klasického Shewhartova regulačního diagramu pro polohu výrobního procesu

8 Závěry a srovnání regulace výrobního procesu pomocí CUSUM diagramu a klasického Shewhartova diagramu

- 1) Z Obrázků č. 3 a č. 4 je patrné, že výrobní proces dle klasického Shewhartova regulačního diagramu pro polohu je statisticky stabilní bez speciálních příčin variability s předvídatelným chováním. Dle regulačního diagramu CUSUM je proces nestabilní, tedy došlo k nominální změně polohy procesu. CUSUM regulační diagramy jsou mnohem citlivější a účinnější k detekci malých změn polohy výrobního procesu a mají též nižší pravděpodobnost chybných signálů neoprávněně zastavit výrobní proces. Jsou složitější na výpočty a rozhodování, což v současné době není vzhledem k aplikaci software podstatným.
- 2) Distribuční funkce délky přeběhu neboli rozdělení počtu výběrů vedoucích k signálu vymezitelné příčiny v diagramu:

Shewhartův regulační diagram a CUSUM regulační diagram srovnání silové funkce a průměrné délky přeběhu

$$1 - \beta = P(\bar{X} \geq UCL) + P(\bar{X} \leq LCL) = \Phi(73,17) + 1 - \Phi(126,83) = 0,030145$$

$$ARL = \frac{1}{1 - \beta} = 33,2$$

- 3) Průměrná délka přeběhu je u Shewhartova regulačního diagramu vyšší 33,2 než u CUSUM regulačního diagramu.

Závěr

Hodnocení výkonnosti a sensitivity regulačních diagramů je založeno zejména na operativní charakteristice a průměrné délce přeběhu. Operativní charakteristika je pravděpodobnost toho, že skoková změna polohy nebo variability v regulačních diagramech nebude identifikována. Průměrná délka přeběhu je charakteristika polohy geometrického rozdělení délky přeběhu a znamená počet výběrů, tj. logických podskupin, vedoucích k signálu zastavení výroby překročením regulačních mezí příslušných diagramů. V závěru je monitorován výrobní proces klasickým Shewhartovým diagramem pro polohu a CUSUM diagramem pro kumulativní součty a provedeny vzájemné komparace týkající se účinnosti obou typů regulačních diagramů. Je patrné, že CUSUM regulační diagramy oproti klasickým Shewhartovým regulačním diagramům mají vyšší účinnost a senzitivitu detekovat a identifikovat i malé skokové změny polohy procesu. Dále mají menší průměrnou délku přeběhu a riziko zbytečných signálů. V závěru jsou doporučení využití různých typů regulačních diagramů v praxi.

Literatura

- (1) Mykiska, A. – Chmelík, V. – Matušů, M. *Řízení a zabezpečování jakosti*. ČVUT Praha, 1998.
- (2) Nenadál, J – Noskiewičová, D. – Petříková, R – Plura, J. – Tošenovský, J. *Moderní systémy řízení jakosti*. Management Press, 1998.
- (3) Nenadál, J. *Měření v systémech managementu jakosti*. Management press, 2001
- (4) *Normy managementu jakosti ČSN EN ISO 9000: 2000*. Český normalizační institut, 2000.
- (5) Piskáček, B. – Kašová, V. – Zmatlík, J. *Řízení jakosti*. ČVUT Praha, 2001.
- (6) Plura, J. *Plánování a neustálé zlepšování jakosti*. Computer Press, 2001.
- (7) Pyzdek, T. *Giude to SPC, Volume 2, Applications and Special Topics*. Publishing Inc., Tuscon, Arizona, 1992
- (8) Tošenovský, J. – Noskiewičová, D. *Statistické metody pro zlepšování jakosti*. Montanex a.s., 2000.
- (9) Tošenovský, J. *Statistika v řízení jakosti*. DTO, Ostrava, 1995.

Praha, únor 2019

Lektorovali: doc. RNDr. Bohumír Štědroň, CSc.
České vysoké učení technické v Praze

Ing. Šárka Volešová, Ph.D.
Gazzeta, s.r.o.