

Jiří Zmatlík¹, Otto Pastor²

Komparace EWMA a klasických Shewhartových regulačních diagramů při řízení dopravních a výrobních procesů

Klíčová slova: *exponenciální vyrovnání, vyrovnávací konstanta, EWMA regulační diagramy s exponenciálně váženými klouzavými průměry, CUSUM regulační diagramy kumulovaných součtů, Shewhartovy regulační diagramy, komparace klasických a speciálních regulačních diagramů*

Úvod

Článek se zabývá komparací klasických Shewhartových regulačních diagramů s EWMA diagramy, které jsou na základě přiřazené váhy jednotlivým pozorováním schopny detekovat i malé změny polohy a variability výrobních a nevýrobních procesů. Zmíněné diagramy vycházejí z autokorelace, což představuje závislost daného pozorování na více předcházejících pozorování. Vlastní porovnání diagramů je dokumentováno na monitorování a regulaci výrobního procesu. Klasické Shewhartovy regulační diagramy vzhledem k nižší citlivosti a účinnosti nejsou schopny detekovat malé spojitě a skokové změny procesu na rozdíl od EWMA regulačních diagramů.

1 Regulační diagramy s exponenciálně váženými klouzavými průměry

Výrobní a nevýrobní procesy je možné statisticky řídit a regulovat nejen klasickými regulačními diagramy pro polohu a variabilitu, u kterých každé pozorování má stejnou váhu a důležitost, ale též speciálními regulačními diagramy s váženými pozorováními. Regulační diagramy s váhovými pozorováními jsou schopné detekovat a identifikovat postupné a menší změny polohy procesu. Princip vah je založen na myšlence, že jednotlivým pozorováním je přiřazena váha takovým způsobem, že časově chronologicky mladší pozorování mají větší váhu/důležitost

¹ Ing. Jiří Zmatlík, Ph.D. (*1969) působí v oblasti aplikované matematiky a statistiky v rámci řízení podniku. Obhájil disertační práci v oblasti statistického řízení jakosti. Působí na České zemědělské univerzitě v Praze na Provozně ekonomické fakultě na katedře statistiky. Přednáší a cvičí předměty aplikované statistiky. Zabývá se zejména statistickými modely v zemědělství a metodami aplikovatelnými pro zlepšování jakosti.

² prof. Dr. Ing. Otto Pastor, CSc. (*1948) je předním odborníkem v oblasti teorie dopravy a dopravních systémů jako součást logistických procesů. Působí jako profesor v oboru Management a technologie dopravy na ČVUT v Praze na Fakultě dopravní v Ústavu logistiky a managementu dopravy. Zabývá se zejména rozhodovacími procesy, aplikovanými matematickými modely v dopravě a logistice se zaměřením na ekonomicko-technologickou podstatu problematiky.

než pozorování starší. Většinou se jedná o exponenciální váhy a tzv. exponenciální vyrovnání (Exponential smoothing).

Níže uvedené vztahy specifikují filozofii exponenciálního vyrovnání. První rovnice pro proměnnou Z_t charakterizuje skutečnost, že predikovaná hodnota závisí na dané skutečné hodnotě polohy procesu proměnné X_t s vahou λ a na doplňkové váze $1-\lambda$ předcházející vyrovnané hodnoty, která je ve vztahu chronologicky rozepsána. Druhá rovnice obecně popisuje předcházející rovnici s využitím počáteční polohy procesu Z_0 . Třetí rovnice ze souboru specifikuje součet geometrické řady o t členech s daným parametrem / váhou λ .

$$Z_t = \lambda \times \bar{X}_t + (1-\lambda) \times \{ \lambda \times \bar{X}_{t-1} + (1-\lambda) \times Z_{t-2} \}$$

$$Z_t = \lambda \sum_{i=0}^{t-1} (1-\lambda)^i \times \bar{X}_{t-i} + (1-\lambda)^t \times Z_0$$

$$\lambda \times \sum_{i=0}^{t-1} (1-\lambda)^i = \frac{\lambda \times (1 - (1-\lambda)^t)}{1 - (1-\lambda)} = 1 - (1-\lambda)^t$$

Z_t	exponenciálně vyrovnaná proměnná v čase t
Z_0	počáteční hodnota proměnné v čase $t=0$
λ	parametr/váha exponenciálního vyrovnání
\bar{X}_t	hodnota časové řady specifikující výběrový průměr (polohu procesu) dané logické podskupiny

Při uvažování výrobního nebo nevýrobního procesu, u kterého jsou parametry μ_0 polohy a variability σ_0 dány normou, deklarované zákazníkem nebo na základě předcházejících zkušeností, EWMA regulační meze dolní a horní pro polohu procesu jsou vyjádřeny rovnicemi uvedenými níže. Dané rovnice specifikují interval, ve kterém leží 99,73 % hodnot polohy procesu v závislosti na nastaveném parametru exponenciálních vah λ .

$$UCL(Z_t) = \mu_0 + 3 \times \sigma_{EWMA} = \mu_0 + 3 \times \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

$$LCL(Z_t) = \mu_0 - 3 \times \sigma_{EWMA} = \mu_0 - 3 \times \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

μ_0	střední hodnota polohy procesu
n	počet pozorování (logických podskupin)
σ_0	směrodatná odchylka, resp. variabilita procesu
λ	parametr exponenciálního vyrovnání

Crowderova procedura je algoritmus, pomocí něhož je možné specifikovat a kvantitativně určit vyrovnávací konstantu λ . Je dále známo, že rozdělení délky přeběhu, tj. rozdělení počtu výběrů vedoucí k signálu, že byly překročeny regulační meze, má diskrétní geometrické rozdělení pravděpodobnosti. Filozofie Crowderovy procedury je iteracemi nalezení minimální průměrné délky přeběhu pro definovanou změnu průměru/polohy procesu na základě níže uvedené rovnice.

$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0} \quad \text{normovaný posun polohy procesu/střední hodnoty}$$

$$\Delta = \delta \times \sqrt{n}$$

Δ kritická, resp. maximální změna polohy procesu

Na základě grafického vyjádření funkčního vztahu $\lambda=f(\Delta)$ a závislosti parametru $K=f(\lambda)$ uvedené v odborné literatuře je možné velice rychle zjistit požadovanou vyrovnávací konstantu exponenciálního vyrovnání.

2 Srovnání monitorování polohy procesu klasickým Shewhartovým diagramem a EWMA regulačním diagramem

Níže uvedená data s normálním rozdělením pravděpodobnosti jsou regulována klasickým Shewhartovým diagramem pro průměr – polohu procesu a regulačním diagramem pro vážené klouzavé průměry EWMA. Data byla sbírána z výrobního procesu, ve kterém došlo k růstu nominální hodnoty na hodnotu 110 skokovou změnou polohy procesu. Tabulka č.1 – specifikace Dat. Základem srovnání citlivosti a účinnosti je regulace klasickým Shewhartovým diagramem – viz v textu dále a využití EWMA diagramu.

Shewhartovy regulační diagramy se stanovenými horními a dolními regulačními mezemi

$$UCL = CL + 3 \times \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = 100 + 3 \times \frac{20}{\sqrt{5}} = 126,83$$

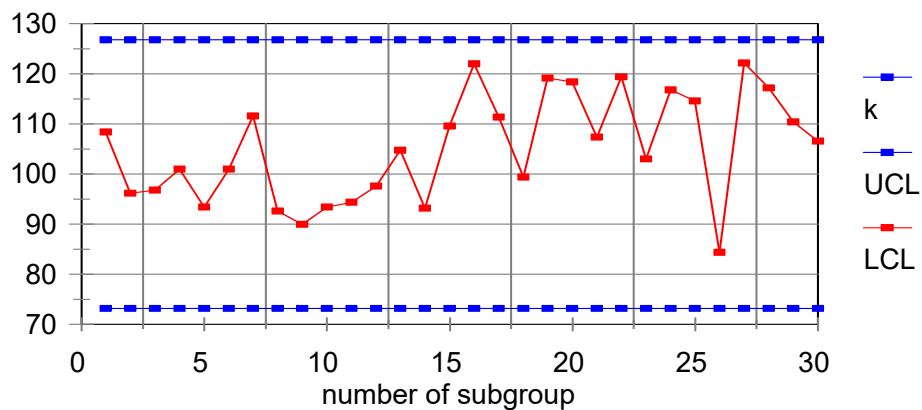
$$LCL = CL - 3 \times \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = 100 - 3 \times \frac{20}{\sqrt{5}} = 73,17$$

Tabulka 1: Data pro komparaci klasického Shewhartova regulačního diagramu a EWMA diagramu.

k	\bar{X}_k
1	108,4
2	96,2
3	96,8
4	101,0
5	93,4
6	101,0
7	111,6
8	92,6
9	90,0
10	93,4
11	94,4

12	97,6
13	104,8
14	93,2
15	109,6
16	122,0
17	111,4
18	99,4
19	119,2
20	118,4
21	107,4
22	119,4
23	103,0
24	116,8
25	114,6
26	84,4
27	122,2
28	117,2
29	110,4
30	106,6

Shewhart X Control Chart



Obrázek 1: Regulace procesu pomocí klasického Shewhartova regulačního diagramu pro polohu výrobního procesu

$$\mu_o = 100$$

$$\sigma_o = 20$$

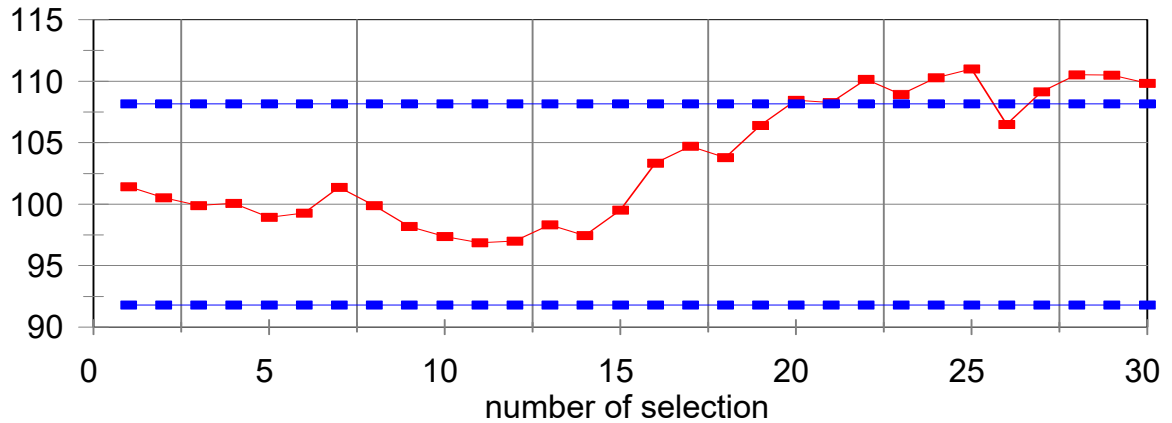
$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0} = \frac{110 - 100}{20} = 0,5$$

$$\Delta = \delta \times \sqrt{n} = 0,5 \times \sqrt{5} = 1,118$$

$$\lambda = 0,17$$

EWMA Control Chart

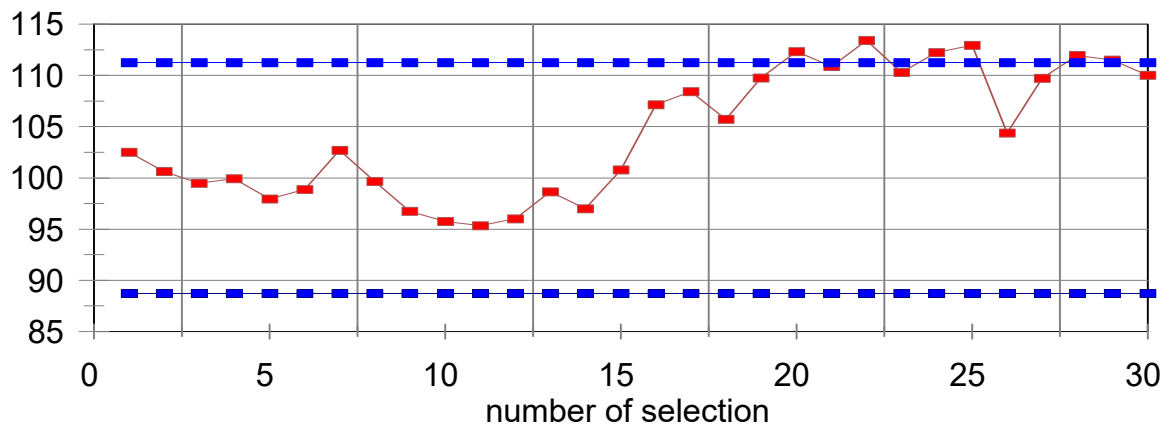
for stable production process



Obrázek 2: Regulace výrobního procesu pomocí EWMA regulačního diagramu s vyrovnávací konstantou 0,17

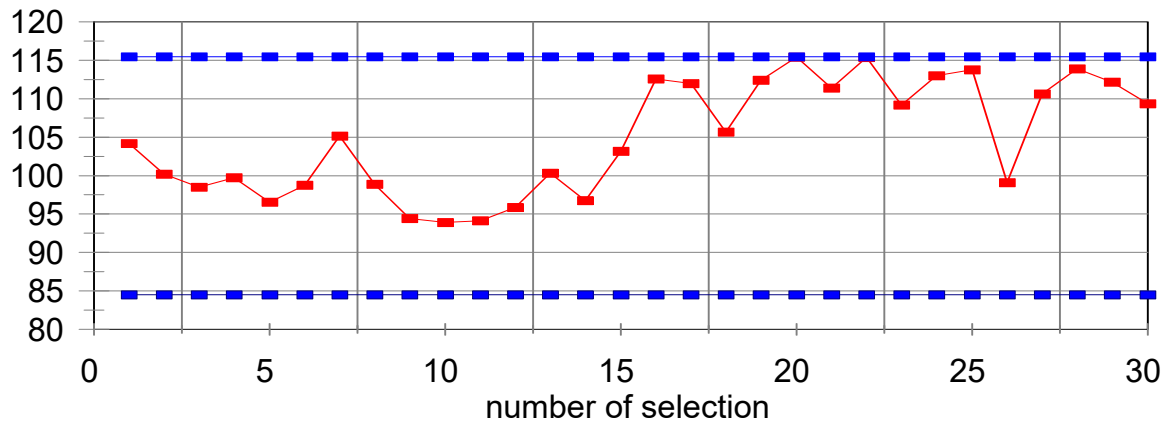
EWMA Control Chart

for stable production process



Obrázek 3: Regulace výrobního procesu pomocí EWMA regulačního diagramu s vyrovnávací konstantou 0,30

EWMA Control Chart for stable production process



Obrázek 4: Regulace výrobního procesu pomocí EWMA regulačního diagramu s vyrovnávací konstantou 0,50

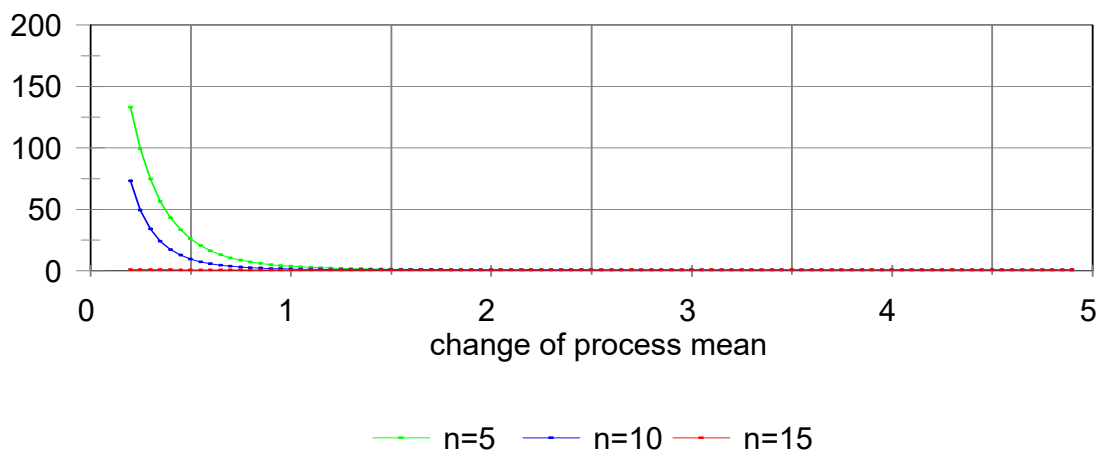
3 Závěry komparace zmíněných typů regulačních diagramů

1) EWMA regulační diagramy, stejně jako regulační diagramy CUSUM pro kumulativní součty, dávají stejný výsledek vzhledem ke své citlivosti a účinnosti, že sledovaný a monitorovaný výrobní proces není stabilní, nemá předvídatelné chování. U EWMA regulačních diagramů závisí citlivost a účinnost detekce 10 % změny polohy procesu na vyrovnávací konstantě. Klasické Shewhartovy regulační diagramy nejsou schopny identifikovat zmíněný posuv polohy výrobního procesu.

2) Citlivost a účinnost regulačních diagramů EWMA závisí na vyrovnávacím parametru/váze λ . Vyšší hodnoty parametru nejsou schopny detekovat malé změny polohy výrobního procesu. Vyšší hodnoty vyrovnávací konstanty dávají vyšší váhu/důležitost méně vzdáleným hodnotám. Pokud je vyrovnávací parametr $\lambda=1$, konstruujeme klasické Shewhartovy diagramy polohy procesu. Pokud je vyrovnávací parametr $\lambda=0$, konstruujeme CUSUM regulační diagramy pro kumulativní součty.

3) Průměrná délka přeběhu je náhodná veličina s geometrickým rozdělením pravděpodobnosti.

Average Run Length X Shewhart Control Chart



Obrázek 5: Průměrná délka přeběhu pro různé velikosti výběrů/logických podskupin

Závěr

V praktických aplikacích je nutné identifikovat, řídit a regulovat i malé změny v parametrech polohy a variability výrobních a nevýrobních procesů. Klasické Shewhartovy regulační diagramy dávají menší možnosti reálné regulace spojitých malých změn příslušných parametrů vzhledem ke své omezené citlivosti. Z daných důvodů je vhodné aplikovat pro tyto malé spojitě či skokové změny regulační diagramy EWMA, které jsou vhodné pro autokorelované procesy a vycházejí z exponenciálního vyrovnání, kdy hodnotám například polohy procesu jsou přiřazeny váhy tak, že většinou časově mladší pozorování mají nižší váhu než pozorování starší. Vyrovnávací parametr je u stacionárních procesů vyčíslen na základě Crowderova algoritmu funkční závislosti změny procesu na vyrovnávací konstantě. Základem je minimální střední hodnota délky přeběhu, tj. počet logických podskupin, kdy je identifikována změna procesu ve formě překročení regulačních mezí.

Literatura

- (1) Mykiska, A. – Chmelík, V. – Matušů, M. *Řízení a zabezpečování jakosti*. ČVUT Praha, 1998.
- (2) Nenadál, J – Noskiewičová, D. – Petříková, R – Plura, J. – Tošenovský, J. *Moderní systémy řízení jakosti*. Management Press, 1998.
- (3) Nenadál, J. *Měření v systémech managementu jakosti*. Management press, 2001.
- (4) *Normy managementu jakosti ČSN EN ISO 9000: 2000*. Český normalizační institut, 2000.
- (5) Piskáček, B. – Kašová, V. – Zmatlík, J. *Řízení jakosti*. ČVUT Praha, 2001
- (6) Plura, J. *Plánování a neustálé zlepšování jakosti*. Computer Press, 2001
- (7) Pyzdek, T. *Guide to SPC, Volume 2, Applications and Special Topics*. Publishing Inc., Tuscon, Arizona, 1992
- (8) Tošenovský, J. – Noskiewičová, D. *Statistické metody pro zlepšování jakosti*. Montanex a.s., 2000.
- (9) Tošenovský, J. *Statistika v řízení jakosti*. DTO, Ostrava, 1995.

Praha, únor 2019

Lektorovali: doc. RNDr. Bohumír Štědroň, CSc.
České vysoké učení technické v Praze

Ing. Šárka Volešová, Ph.D.
Gazzeta, s.r.o.