

Jiří Zmatlík¹, Pavel Zdvořák²

Problémy hodnocení výkonnosti a způsobilosti řízení procesů v rámci nesplnění normality rozdělení dominantního znaku jakosti

Klíčová slova: *neshodný produkt, znaky jakosti měřitelné a znaky jakosti neměřitelné, riziko vzniku neshodných produktů, podíl neshodných produktů, Clementsovy indexy, odhad neshodných produktů při transformaci rozdělení*

Úvod

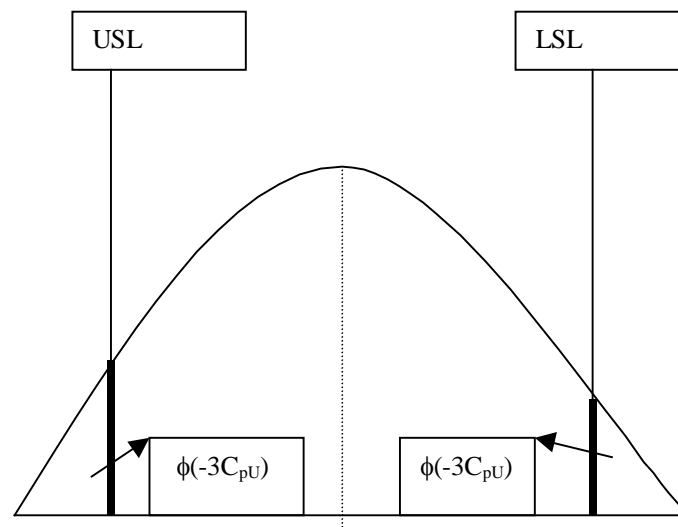
Článek se zabývá výkonností a způsobilostí, což je vlastnost výrobních a nevýrobních procesů a systémů, výrobních automatizovaných a středně automatizovaných zařízení a měřicích systémů trvale dosahovat výstupy vysoké kvality a kvalitativních normativních standardů. Řeší problémy v případě, že výstupy z procesů nemají normální rozdělení pravděpodobnosti, či počet pozorování je malý. Článek se dále zabývá hodnocením výkonnosti a způsobilosti v případě neměřitelných znaků jakosti navazující na statistickou regulaci srovnáním. Cílem je specifikovat pohledy na využití indexů výkonnosti a způsobilosti, nejsou-li plně splněny výchozí podmínky normality dat, odlehlosti pozorování, statisticky stabilních procesů. Součástí je též pohled stanovení odhadu neshodných produktů.

1 Odhad rizika vzniku neshodných produktů

Dosud nejčastějším kritériem jakosti výroby bylo riziko (pravděpodobnost) vzniku neshodných produktů. Produkt je neshodný, jestliže sledovaný znak jakosti leží mimo toleranční pole, což je patrné z obrázku č. 1.

¹ Ing. Jiří Zmatlík, Ph.D. (*1969) působí v oblasti aplikované matematiky a statistiky v rámci řízení podniku. Obhájil disertační práci v oblasti statistického řízení jakosti. Působí na České zemědělské univerzitě v Praze na Provozně ekonomické fakultě na katedře statistiky. Přednáší a cvičí předměty aplikované statistiky. Zabývá se zejména statistickými modely v zemědělství a metodami aplikovatelnými pro zlepšování jakosti.

² Ing. Pavel Zdvořák (*1956) je odborníkem v oblasti řízení a technologie dopravy jako součást logistických procesů. Působí jako odborný asistent v oblasti řízení a technologie dopravy na ČVUT v Praze na Fakultě dopravní v Ústavu logistiky a managementu dopravy. Zabývá se zejména dopravními systémy a technologiemi, aplikovanými matematickými modely v dopravě a logistice se zaměřením na ekonomickou podstatu problematiky.



Obrázek 1: Riziko vzniku neshodných produktů

V případě normálního rozdělení znaku jakosti lze odvodit vztahy pro riziko P (pravděpodobnost) vzniku neshodných produktů:

$$\begin{aligned}
 P &= P(X \leq LSL) + P(X \geq USL) = P(X \leq LSL) + 1 - P(X \leq USL) = \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{USL - \mu}{\sigma}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\mu - USL}{\sigma}\right) = \Phi(-3 \times C_{pL}) + \Phi(-3 \times C_{pU})
 \end{aligned}$$

Φ distribuční funkce normovaného normálního rozdělení
 μ a σ parametry procesu

Pravděpodobnost vzniku neshodných produktů bude pro obecný případ ležet v intervalu $[\Phi(3C_{pk}), 2 \times \Phi(3C_{pk})]$. Hodnota pravděpodobnosti $2 \times \Phi(3C_{pk})$ odpovídá situaci, že střední hodnota sledovaného znaku jakosti leží uprostřed tolerančního pole vymezeného tolerančními mezemi.

Ilustrativní ukázka

Je uvažován výrobní proces s normálním rozdělením znaku jakosti, jehož parametry jsou $\mu = 14$ a $\sigma = 3$, cílová hodnota $\tau = 15$ a toleranční meze byly stanoveny na hodnoty $USL = 24$ a $LSL = 5$.

$$P = \Phi(-3C_{pL}) + \Phi(-3C_{pU}) = \Phi(-3) + \Phi\left(\frac{-10}{3}\right) = 0,00178$$

$$C_{pU} = \frac{USL - \mu}{3\sigma} = \frac{24 - 14}{3 \times 3} = 10/9$$

$$C_{pL} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma} = \frac{14 - 5}{3 \times 3} = 1$$

Pravděpodobnost vzniku neshodných produktů ukazuje, že z 1 000 produktů budou cca 2 produkty neshodné.

V praxi se často vyskytují případy, kdy počet pozorování pro odhad parametrů procesu μ a σ není dostatečně velký a je nutné odhadnout riziko vzniku neshodných produktů z malých výběrů. Například firma General Motors vypracovala zjednodušenou studii způsobilosti pro 50 po sobě jdoucích měřených hodnot dominantního znaku jakosti.

Pro n naměřených hodnot sledovaného znaku jakosti $x_1, x_2 \dots x_n$ z procesu s přibližně normálním rozdělením platí níže uvedené vztahy:

$$F(z) = 0 \text{ pro } \rightarrow z \leq \bar{x} - \frac{n-1}{\sqrt{n}} \times s$$

$$F(z) = 1 \text{ pro } \rightarrow z \geq \bar{x} + \frac{n-1}{\sqrt{n}} \times s$$

$$F(z) = T(n-2, A(z)) \text{ pro } \rightarrow A(z) = \frac{\sqrt{n-2} \times (z - \bar{x})}{\sqrt{\frac{(n-1)^2}{n} \times s^2 - (z - \bar{x})^2}}$$

Pravděpodobnost vzniku neshodných produktů je P:

$$P = 1 - F(USL) + F(LSL)$$

\bar{x}	výběrový průměr vzorku
S	směrodatná odchylka procesu
T	distribuční funkce Studentova rozdělení
n	rozsah souboru

Ilustrativní ukázka

Je uvažován vzorek o rozsahu $n = 10$, u něhož byly stanoveny výběrové charakteristiky: výběrový průměr 27,195; výběrová směrodatná odchylka 0,0041. Výrobní proces má stanoveny toleranční meze na hodnoty $USL = 27,203$ a $LSL = 27,183$.

Platí

$$z < 27,195 - \frac{10-1}{\sqrt{10}} \times 0,0041 = 27,1833$$

$$z > 27,195 + \frac{10-1}{\sqrt{10}} \times 0,0041 = 27,2067$$

Vzhledem k tomu, že $LSL = 27,183$ je menší než vypočtená z hodnota, je pravděpodobnost neshodných produktů nulová. USL dosahuje hodnoty 27,203, což je méně než vypočtená hodnota $z = 20,2067$, pravděpodobnost vzniku neshodných produktů se stanoví ze Studentova rozdělení dle následujícího vztahu:

$$A(USL) = \frac{\sqrt{10-2} \times (27,203 - 27,195)}{\sqrt{\frac{(10-1)^2}{10} \times 0,0041^2 - (27,203 - 27,195)^2}} = 2,66$$

Pravděpodobnost vzniku neshodných produktů je dána:

$$P = 1 - F(USL) + F(LSL) = 1 - F(USL) + 0 = 1 - T_{(8;2,66)} = 0,0144$$

Specifikace výkonnosti a způsobilosti vycházející z našeho vzorku charakterizuje riziko vzniku neshodných produktů v úrovni 1,44 %.

2 Hodnocení způsobilosti u měřitelných znaků jakosti s nenormálním rozdělením

Klasické ukazatele výkonnosti a způsobilosti jsou konstruovány pro data s normálním rozdělením, přičemž normalitu je třeba vždy ověřit pomocí statistických testů. Nepotvrdí-li testy normalitu dat, existuje několik možností řešení dané situace [8,7]:

- Provést transformaci dat, aby bylo dosaženo normálního rozdělení, a postupovat cestou pro normální rozdělení. Obtížné je nalezení vhodné transformace dat, přičemž na závěr je nutné provést zpětnou transformaci. Obvykle se využívá transformace $Z = X^k$, kde k se volí iterativně tak, aby data vykazovala normální rozdělení, tj. přibližně nulový koeficient šikmosti.
- Zjistit typ rozdělení a nalézt kvantily, které vymezují 99,73 % hodnot statistického souboru. Problémem je nalezení typu rozdělení vzhledem například k malému počtu naměřených hodnot.
- Aproximovat data vhodným teoretickým rozdělením a stanovit potřebné kvantily.
- Využít speciálních ukazatelů výkonnosti a způsobilosti, které nevyžadují normalitu dat.

Pro rozdělení Beta, Gama a Studentovo navrhnul v roce 1989 Clements indexy C_p' a C_{pk}' , které vycházejí z filozofie indexů pro normální rozdělení pravděpodobnosti dat. Tyto indexy jsou definovány dle níže uvedených vztahů:

$$C_p' = \frac{USL - LSL}{U_p - L_p}$$
$$C_{pk}' = \min(C_{pL}', C_{pU}') \quad C_{pL}' = \frac{M - LSL}{M - L_p}$$
$$C_{pU}' = \frac{USL - M}{U_p - M}$$

U_p horní kvantil
 L_p dolní kvantil
 M medián

Postup pro stanovení těchto indexů je následující:

1. Specifikují se toleranční meze USL a LSL.

2. Určí se charakteristiky polohy (výběrový průměr), variability (výběrová směrodatná odchylka), šikmosti (koeficient šikmosti, kvantilová šikmost) a charakteristiky špičatosti (koeficient špičatosti).
3. Ve speciálních tabulkách Clements (1989) se naleznou hodnoty standardizovaných kvantilů L_p' , U_p' pro zvolenou pravděpodobnost p a vypočtené hodnoty šikmosti a špičatosti.
4. Stanoví se hodnoty kvantilů pro daný výběrový průměr a pro danou směrodatnou odchylku, přičemž platí rovnice:

$$L_p = \bar{x} - s \times L_p'$$

$$U_p = \bar{x} + s \times U_p'$$

5. Stanoví se hodnota mediánu M ze vztahu:

$$M = \bar{x} + s \times M'$$

6. Vypočítají se Clementsovy ukazatele [4] výkonnosti a způsobilosti výše definované.

Clementsova metoda byla doplněna o další indexy způsobilosti, které vycházejí z následujících níže uvedených vztahů:

$$C_{pm}' = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\left(\frac{U_p - L_p}{6}\right)^2 + (M - T)^2}}$$

$$C_{pm}^* = \frac{\min(USL - T, T - LSL)}{3\sqrt{\left(\frac{U_p - L_p}{6}\right)^2 + (M - T)^2}}$$

$$C_{pmk}' = \min\left(\frac{USL - M}{3\sqrt{\left(\frac{U_p - M}{3}\right)^2 + (M - T)^2}}, \frac{M - LSL}{3\sqrt{\left(\frac{M - L_p}{3}\right)^2 + (M - T)^2}}\right)$$

Jak již bylo zmíněno, Clementsova metoda není použitelná pro jakékoliv nenormální rozdělení. Je tedy nutné vybrat určitý typ rozdělení a posoudit jeho předpoklady pomocí testu χ^2 nebo Kolmogorovým-Smirnovovým testem. Při znalosti parametrů rozdělení je nutné stanovit kvantily $x_{0,00135}$ a $x_{0,99865}$, které vymezují 99,73 % souboru jako interval šesti sigma v normálním rozdělení. Byly navrženy následující ukazatelé výkonnosti a způsobilosti, kde μ je střední hodnota a T je cílová hodnota sledovaného znaku jakosti.

$$C_{pp} = \min\left(\frac{\mu - LSL}{\mu - x_{0,00135}}, \frac{USL - \mu}{x_{0,99865} - \mu}\right)$$

$$C_{pT} = \min\left(\frac{T - LSL}{T - x_{0,00135}}, \frac{USL - T}{x_{0,99865} - T}\right)$$

Pro jednostrannou toleranci, je-li USL rovno cílové hodnotě, je možné vyjádřit ukazatele způsobilosti C_{pp} a C_{pT} v následujícím tvaru:

$$C_{pp} = \frac{\bar{x} - LSL}{\bar{x} - x_{0,00135}}$$

$$C_{pT} = \frac{T - LSL}{T - x_{0,00135}}$$

Pro jednostrannou toleranci, je-li LSL rovno cílové hodnotě znaku jakosti, je možné ukazatele způsobilosti vyjádřit ve tvaru:

$$C_{pp} = \frac{USL - \bar{x}}{x_{0,99865} - \bar{x}}$$

$$C_{pT} = \frac{USL - T}{x_{0,99865} - T}$$

Problematikou konstrukce těchto indexů způsobilosti je nalezení kvantilů, které vyžadují rozsah souboru větší než 800. Doporučuje se však místo kvantilů $x_{0,00135}$ a $x_{0,99865}$ pracovat s hodnotami x_{\min} a x_{\max} . To však může způsobit zkreslení a vést k problematice extrémních hodnot.

3 Hodnocení způsobilosti u neměřitelných znaků jakosti

Způsobilost procesu lze hodnotit také v případě, že znak jakosti je neměřitelná diskrétní náhodná veličina, lze stanovit počet nebo podíl neshodných produktů a počet nebo podíl neshod. K hodnocení způsobilosti se nejčastěji používají průměrné úrovně výskytu neshodných produktů nebo neshod. Mají-li tyto průměrné míry charakterizovat způsobilost procesu, je nutné, aby shromážděné údaje charakterizovaly statisticky zvládnutý proces. Způsobilost procesu v tomto případě odpovídá úrovni centrální přímky v regulačním diagramu. Průměrně dosahované úrovně se obvykle vyjadřují v jednotkách ppm (parts per million) nebo dpm (defects per million), pokud je výskyt neshodných produktů a neshod nízký.

Způsobilost procesů a kvalitativních znaků jakosti lze vyjádřit ekvivalenty C_p a C_{pk} představujícími hodnoty indexů měřitelného a normálně rozloženého znaku jakosti, kterému odpovídá stanovený průměrný podíl neshodných výrobků.

Vztahy pro ekvivalenty indexů C_p a C_{pk} jsou následující:

$$Ekv, C_p = \frac{u_{1-\frac{p}{2}}}{3}$$

$$Ekv, C_{pk} = \frac{u_{1-p}}{3}$$

$u_{1-\frac{p}{2}}, u_{1-p}$ kvantily normovaného normálního rozdělení
 $\frac{p}{3}$ průměrný podíl neshodných produktů u statisticky stabilního procesu

Stanovení ekvivalentů ukazatelů způsobilosti je ve své podstatě inverzní úlohou k odhadu pravděpodobnosti neshodných produktů na základě indexů způsobilosti měřitelných znaků jakosti.

Při hodnocení způsobilosti se průměrný podíl neshodných produktů porovnává s hodnotou, která je požadována zákazníkem. Porovnání je tedy možné pouze u skupiny produktů, přičemž proces je způsobilý a výkonný, pokud platí:

$$\bar{p} \leq p_0$$

p_0 průměrný podíl neshodných produktů limitovaný zákazníkem

V některých případech je požadováno, aby průměrný podíl žádné podskupiny nepřesáhl mez stanovenou zákazníkem, tedy platí:

$$p_j \leq p_0 \rightarrow \text{pro } \forall j \in (1, k)$$

Průměrný podíl neshodných produktů je náhodná veličina, u které je vhodné stanovit konfidenční interval na α % hladině významnosti. Pro rozsah výběru $n \geq 30$ je jednostranný konfidenční interval dán vztahem:

$$p' = \frac{x+1}{n+1}$$

$$P_{U,t} = p' + \frac{(1-2p') \times d}{n+1} + u_{1-\alpha} \times \sqrt{\frac{p' \times (1-p') \times (1-d/(n+1))}{n+1}}$$

x počet neshodných produktů ve výběru

n rozsah náhodného výběru

α hladina významnosti

d tabelovaný parametr závislý na hladině významnosti, pro $\alpha = 0,05$ je $d = 0,67$

$u_{1-\alpha}$ kvantil normovaného normálního rozdělení

$P_{U,t}$ horní mez jednostranného konfidenčního intervalu

Šířka konfidenčního intervalu [8] závisí na odhadu podílu neshodných produktů, na zvolené hladině významnosti a na rozsahu výběru. Závislost šířky konfidenčního intervalu na rozsahu výběru je významná.

V metodice německého sdružení automobilového průmyslu byl zaveden index $C_{pk,at}$ definovaný rovnicí:

$$C_{pk,at} = \frac{p_{max} - \bar{p}}{3\sigma_p}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{(1-\bar{p}) \times \bar{p}}{n}}$$

p_{max} maximální přípustná úroveň podílu neshodných

n	průměrný rozsah podskupiny
\bar{p}	průměrný podíl neshodných produktů u statisticky stabilního procesu
σ_p	směrodatná odchylka podílu neshodných produktů

Používání tohoto indexu způsobilosti se příliš neuplatnilo. Požadavek na podíl neshodných produktů je přísnější, neboť směrodatná odchylka podílu neshodných produktů se stanoví z průměrného rozsahu logické podskupiny, nikoliv z celkového počtu kontrolovaných produktů. Dle tohoto indexu je proces pokládán za způsobilý, jestliže platí vztah:

$$C_{pk,at} \leq \frac{P_{\max} - \bar{p}}{UCL - \bar{p}}$$

Závěr

Hodnocení výkonnosti a způsobilosti výrobních a nevýrobních procesů, měřících zařízení a dalších procesů je komplexní záležitostí. Byly navrženy Clementsovy indexy pro data s Beta, Gama a Studentovým rozdělením, vycházející z filozofie indexů pro výstupy statisticky stabilních procesů s normálním rozdělením pravděpodobnosti. Součástí článku je i metodika stanovení ukazatelů způsobilosti a výkonnosti pro neměřitelné výstupy při statistické regulaci srovnáním. Ukazatelé výkonnosti a způsobilosti v tomto případě principiálně navazují na měřitelné a normálně rozdělené statisticky stabilní výstupy procesů. Hodnocení způsobilosti a výkonnosti je zásadní záležitostí pro zvyšování konkurenceschopnosti firmy v globálním tržním prostředí.

Literatura:

- [1] Mykiska, A. – Chmelík, V. – Matušů, M. *Řízení a zabezpečování jakosti*. ČVUT Praha, 1998
- [2] Nenadál, J. – Noskiewičová, D. – Petříková, R. – Plura, J. – Tošenovský, J. *Moderní systémy řízení jakosti*. Management Press, 1998
- [3] Nenadál, J. *Měření v systémech managementu jakosti*. Management press, 2001
- [4] *Normy managementu jakosti ČSN EN ISO 9000: 2000*. Český normalizační institut, 2000
- [5] Piskáček, B. – Kašová, V. – Zmatlík, J. *Řízení jakosti*. ČVUT Praha, 2001
- [6] Plura, J. *Plánování a neustálé zlepšování jakosti*. Computer Press, 2001
- [7] Pyzdek, T. *Giude to SPC, Volume 2, Applications and Special Topics*. Publishing Inc., Tuscon, Arizona, 1992
- [8] Tošenovský, J. – Noskiewičová, D. *Statistické metody pro zlepšování jakosti*. Montanex a. s., 2000
- [9] Tošenovský, J. *Statistika v řízení jakosti*. DTO, Ostrava, 1995

Praha, srpen 2018

Lektorovali: doc. RNDr. Bohumír Štědroň, CSc.
Univerzita Karlova

RNDr. Ivo Moll, CSc.
České vysoké učení technické v Praze