Dušan Teichmann[1]

Výpočetní poznámka k problematice stanovení kapacity mezistaničního úseku

Klíčová slova: *kapacita tratě, metoda vkládání dodatečných tras, Gama rozdělení pravděpodobnosti*

Úvod

Problematika posuzování kapacity železničních tratí je stále aktuální a všechny teoretické problémy týkající se metod pro její zjišťování ještě stále nejsou spolehlivě vyřešeny. Pro výpočet kapacity železničních tratí bylo v minulosti navrženo více výpočetních metod. Nejjednodušší výpočetní metody předpokládají deterministický typ provozu a jejich výsledkem bývá nejčastěji tzv. teoretická (maximální) kapacita. Složitější výpočetní metody pohlížejí na provoz v mezistaničním úseku jako na provoz podléhající náhodným vlivům, což více odpovídá realitě. K posuzování kapacity mezistaničního úseku v podmínkách stochastického provozu lze přistoupit více metodami, od analytických přístupů až k simulačním přístupům využívaným zejména v případech, ve kterých analytické přístupy selhávají.

Jedním z analytických přístupů k výpočtu kapacity ve stochastických provozních podmínkách pro výhledové grafikony vlakové dopravy (GVD) je metoda dodatečného vkládání tras pomocí teoretické četnosti mezer. Popis metody je uveden např. v publikacích [1], [3] nebo [6], z novějších potom např. v publikacích [4] nebo [5]. Všechny výše uvedené publikace se při popisu uvedené metody omezují na předpoklad, že délka časových mezer vhodných pro vkládání dodatečných tras se řídí exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti. Tím se teoretický vývoj metody v podstatě zastavil. Předpoklad o existenci exponenciálního rozdělení pravděpodobnosti však nemusí být v reálném provozu vždy splněn. Je sice známo, že jeho použitím lze v určitých případech získat pesimistické odhady sledovaných provozních charakteristik modelovaného procesu (pesimistickým odhadem se pro tyto účely rozumí nižší hodnota počtu vložených tras), tento pesimistický odhad však lze při znalosti obecných pravidel vyplývajících z teorie pravděpodobnosti poměrně snadno zpřesnit.

V prezentovaném článku bude v minulosti navržená metoda aplikována na podmínky, kdy se délka časových mezer vhodných pro vkládání dodatečných tras řídí Gama rozdělením pravděpodobnosti, které má v železniční dopravě také značný význam, viz např. publikace [1] – [3]. V článku navržený způsob výpočtu zároveň

[1] doc. Ing. Dušan Teichmann, Ph.D., 1972, Ing. v oboru obor Dopravní marketing, management a logistika na Dopravní fakultě Jana Pernera Univerzity Pardubice, Ph.D. v oboru Dopravní technika a technologie na Fakultě strojní VŠB – Technické univerzitě v Ostravě, doc. v oboru Technologie a management v dopravě a telekomunikacích na Fakultě dopravní ČVUT v Praze.

ukazuje, jak postupovat, je-li z hlediska testování statistických hypotéz nezamítnut jiný typ rozdělení, kterým se časové mezery řídí.

1 Původní metoda vkládání dodatečných tras

V dalším textu článku bude v matematických vztazích v maximální možné míře využíváno stejného značení, jaké je uvedeno v publikacích [3] a [6]. Původní metoda byla odvozena v situaci, ve které se předpokládá, že časové mezery vhodné pro vkládání dodatečných tras se řídí exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti. Autoři původní metody, kromě výše uvedených předpokladů, uvažují jednosměrně pojížděnou traťovou kolej v mezistaničním úseku (mezistaniční úsek může být rozdělen i na více traťových oddílů). Při možnosti vkládání dodatečných tras do volných exponenciálně rozdělených časových mezer, aniž by byla snížena kvalita dopravy, lze průměrný počet tras N_{dod} dodatečně vložených za tzv. výpočetní dobu vypočítat podle vztahu (1), viz publikace [5]:

$$N_{dod} = N \frac{e^{-\frac{z_1}{\bar{z}}}}{1 - e^{-\frac{\tau}{\bar{z}}}} \tag{1}$$

kde:
N … počet vlaků vyskytujících se v mezistaničním úseku před vkládáním dodatečných tras (plánovaný rozsah vlakové dopravy),
z_1 … minimální délka časové mezery, do které lze vložit právě jednu dodatečnou trasu [min],
$\bar{z}$ … průměrná hodnota délky časové mezery [min],

$$\tau = t_{obs} + z_{min}$$

kde:
t_{obs} … průměrná doba obsazení úseku jedním vlakem [min],
z_{min} … minimální délka časové mezery zajišťující, že nedojde k poklesu požadované úrovně kvality dopravy [min].

Pro dobu obsazení jedním vlakem t_{obs} v případech jednosměrně pojížděných traťových kolejí v mezistaničním úseku (bez ohledu na počet traťových oddílů v mezistaničním úseku) platí:

$$t_{obs} = I$$

kde:
I … následné mezidobí [min].

Podrobný postup odvození jednotlivých vztahů ve smyslu původní metody v podmínkách výskytu časových mezer, jejichž délka se řídí exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti, je uveden v dodatku k prezentovanému článku.

Studiem principů v minulosti navržené metody bylo zjištěno, že ačkoliv to není ve výše uvedených publikacích explicitně uvedeno, má původní výpočetní metoda univerzální charakter z hlediska vstupních podmínek, tzn. je použitelná bez ohledu na typ vyskytujícího se rozdělení pravděpodobnosti. Z uvedeného důvodu je pro další postup klíčový její teoretický postup, který bude uveden v rámci následujících pěti kroků.

Krok 1.

Ověří se, zda se v posuzovaném mezistaničním úseku vyskytuje dostatečná doba potřebná pro vkládání dodatečných tras. Ověření se realizuje prostřednictvím splnění podmínky týkající se dodržení minimální časové mezery, která umožní efektivně likvidovat případně vzniklé zpoždění. Zvyšovat kapacitu jednosměrně pojížděné traťové koleje vkládáním dodatečných tras bez ohledu na to, zda je či není rozdělena na více traťových oddílů, je možno v situacích, kdy platí vztah:

$$\bar{z}_{skut} > z_{min} \tag{2}$$

kde:
$\bar{z}_{skut}$ … skutečná průměrná časová mezera připadající na jednu trasu vlaku [min],
z_{min} … minimální požadovaná hodnota časové mezery připadající na jednu trasu vlaku [min].

Hodnota $\bar{z}_{skut}$ se vypočítá ze vztahu:

$$\bar{z}_{skut} = \frac{T - \left(T_{výl} + T_{stál} + T_{obs}\right)}{N} \tag{3}$$

kde:

T … výpočetní doba [min] (zpravidla 1 440 min),
$T_{výl}$ … celková doba výluk v průběhu výpočetní doby [min],
$T_{stál}$ … celková doba stálých manipulací v průběhu výpočetní doby [min],
T_{obs} … celková doba obsazení mezistaničního úseku plánovanou vlakovou dopravou v průběhu výpočetní doby [min],
N … předpokládaný počet vlaků vyskytujících se v mezistaničním úseku (plánovaný rozsah vlakové dopravy).

Krok 2.

Vypočítají se hodnoty minimálních dob potřebných pro vložení jedné dodatečné trasy, dvou dodatečných tras atd. Minimální doby potřebné pro vkládání daných počtů dodatečných tras se vypočítají z následujících vztahů. Minimální doba potřebná pro vložení jedné dodatečné trasy ze vztahu:

$$z_1 = t_{obs} + 2\ z_{min}$$

Minimální doba potřebná pro vložení dvou dodatečných tras ze vztahu:

$$z_2 = 2\ t_{obs} + 3\ z_{min} \tag{4}$$

Po zobecnění lze pro minimální dobu potřebnou pro vložení k dodatečných tras (kde $k \in Z^+$ a Z^+ je množina kladných celých čísel) psát vztah:

$$z_k = k\, t_{obs} + (k+1)\, z_{min} \qquad (5)$$

Krok 3.

Vypočítají se pravděpodobnosti výskytu mezer potřebných pro vložení jednotlivých počtů dodatečných tras (jedné trasy, dvou tras, tří tras atd.). Symbol $f(z)$ v dalším textu reprezentuje hustotu pravděpodobnosti rozdělení, kterým se řídí délky časových mezer vhodných pro vkládání dodatečných tras vlaků.

Pro pravděpodobnost výskytu časové mezery, do níž lze vložit právě jednu dodatečnou trasu, platí:

$$p_1 = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz \qquad (6)$$

analogicky, pro pravděpodobnost výskytu časové mezery, do níž lze vložit právě dvě dodatečné trasy, platí:

$$p_2 = \int_{z_2}^{z_3} f(z)dz \qquad (7)$$

a obecně pro pravděpodobnost výskytu časové mezery, do níž lze vložit právě k dodatečných tras, kde $k \in Z^+$, platí:

$$p_k = \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(z)dz \qquad (8)$$

Krok 4.

S využitím vztahů (6) – (8) se vypočítají teoretické četnosti (teoretické počty případů) výskytu časových mezer potřebných pro vložení jednotlivých počtů dodatečných tras (jedné trasy, dvou tras, tří tras atd.) a to ze vztahů:

pro teoretickou četnost výskytu časové mezery, do níž lze vložit právě jednu dodatečnou trasu, platí:

$$h_1 = N\, p_1 = N \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$$

analogicky, pro teoretickou četnost výskytu časové mezery, do níž lze vložit právě dvě dodatečné trasy, platí:

$$h_2 = N\, p_2 = N \int_{z_2}^{z_3} f(z)dz$$

a obecně pro teoretickou četnost výskytu časové mezery, do níž lze vložit právě k dodatečných tras, kde $k \in Z^+$, platí:

$$h_k = N\,p_k = N\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(z)dz \tag{9}$$

Symbol N reprezentuje opět rozsah vlakové dopravy (počet vlaků, který je naplánován k realizaci před zahájením výpočtu dodatečného počtu vkládaných tras).

Krok 5.

Průměrný počet tras, které bude možno dodatečně vložit za výpočetní dobu T, se vypočítá ze vztahu:

$$N_{dod} = \sum_{k=1}^{\infty} k\,h_k \tag{10}$$

2 Postup použití metody v případě výskytu časových mezer řídících se Gama rozdělením pravděpodobnosti

Předpokládejme nyní, že v podmínkách jednosměrně pojížděné traťové koleje jsou z hlediska plánovaného rozsahu vlakové dopravy splněny časové předpoklady pro vkládání dodatečných tras a délky časových mezer umožňujících vkládání dodatečných tras se řídí Gama rozdělením pravděpodobnosti definovaným hustotou ve tvaru:

$$\begin{gathered} f(z) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} z^{a-1} e^{-bz} \quad \text{pro } z \geq 0, a > 0, b > 0 \\ f(z) = 0 \quad \text{jinde} \end{gathered} \tag{11}$$

kde:
a, b … parametry rozdělení,
$\Gamma(a)$ … je Gama funkce pro $a > 0$ definovaná vztahem $\Gamma(\mathrm{a}) = \int_0^\infty \mathrm{z}^{\mathrm{a}-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{z}}\mathrm{dz}$.

V učebnicích teorie pravděpodobnosti je často Gama rozdělení charakterizováno jako zobecněné exponenciální rozdělení. Protože umožňuje modelovat vyšší variabilitu průběhů hustot pravděpodobnosti, je jeho použití univerzálnější než použití exponenciálního rozdělení. To totiž nabývá v podstatě pouze jednoho typu průběhu, přičemž konkrétní realizace se mohou odlišovat pouze rychlostmi poklesu hustoty pravděpodobnosti (růstu distribuční funkce pro $z \geq 0$).

Připomeňme ještě, že Gama rozdělení přechází při určitých hodnotách parametrů v jiná rozdělení, a to:

a) při hodnotě parametru $a = 1$ dostáváme funkční předpis pro hustotu exponenciálního rozdělení pravděpodobnosti,

b) při hodnotě parametru $a = \frac{n}{2}$ a $b = \frac{1}{2}$ dostáváme funkční předpis pro hustotu χ_n^2 rozdělení pravděpodobnosti (kde symbol n reprezentuje počet stupňů volnosti).

Protože je známo, že primitivní funkce k hustotě pravděpodobnosti Gama rozdělení není analyticky vyjádřitelná, nezbývá tedy, než k výpočtu pravděpodobností výskytů časových mezer pro vkládání dodatečných tras a následně také k výpočtu teoretických četností výskytů časových mezer pro vkládání dodatečných tras použít vztah využívající distribuční funkci, přičemž hodnoty distribuční funkce budou vypočítány numericky.

Obecné pravidlo pro výpočet pravděpodobnosti, že náhodná proměnná X nabude hodnoty z intervalu $\langle x_1; x_2)$ má tvar:

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) \tag{12}$$

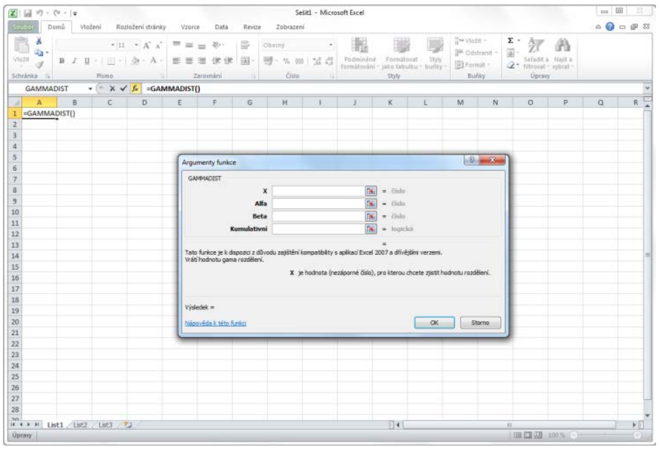
kde hodnoty $F(x_1)$ a $F(x_2)$ jsou hodnoty distribuční funkce v bodech x_1 a x_2.

Hodnoty distribuční funkce Gama rozdělení sice nejsou ve statistických tabulkách běžně uváděny, není však vůbec obtížné získat je např. z programu MS Excel. K získání hodnot distribuční funkce Gama rozdělení se v programu MS Excel používá funkce GAMMADIST. V souvislosti s využíváním programu MS Excel je však nutno upozornit na skutečnost, že hustota pravděpodobnosti je v tomto programu definována odchylně od vztahu (11) a to ve tvaru:

$$\begin{gathered} f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad \text{pro } x \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0 \\ f(x) = 0 \quad \text{jinde} \end{gathered} \tag{13}$$

Porovnáním vztahu (11) se vztahem (13) vidíme, že platí $\alpha = a$ a $\beta = \frac{1}{b}$.

Ukázka dialogového okna pro výpočet hodnot funkce GAMMADIST je na obrázku 1.



Obrázek 1: Dialogové okno pro výpočet hodnot funkce GAMMADIST

Pro výpočet hodnoty distribuční funkce v bodě x je nutno v dialogovém okně funkce GAMMADIST definovat hodnoty x, α, β a vyplnit logickou položku „Kumulativní". V novém Listu tedy zapíšeme do libovolné zvolené buňky relační znaménko = a následně vybereme z nabídky funkcí zmiňovanou funkci GAMMADIST. Po otevření dialogového okna pro funkci GAMMADIST vyplníme hodnoty x, $\alpha = a$, $\beta = \frac{1}{b}$

a do logické položky napíšeme výraz PRAVDA. Po stisknutí tlačítka OK obdržíme ve zvolené buňce hodnotu distribuční funkce Gama rozdělení (ta je v dialogovém okně dohledatelná i bez nutnosti stisknutí tlačítka OK v položce Výsledek).

Po výpočtu pravděpodobností výskytů časových mezer pro dodatečné vložení jedné dodatečné trasy, dvou dodatečných tras atd. podle původního navrženého postupu vypočítáme četnosti výskytů časových mezer pro dodatečné vložení jedné dodatečné trasy, dvou dodatečných tras atd. K tomu využijeme vztahu (9) a následně pro výpočet průměrného počtu dodatečně vkládaných tras za výpočetní dobu využijeme vztah (10).

4 Modelový příklad

Uvažujme jednosměrně pojížděnou traťovou kolej. Dále předpokládejme, že prostřednictvím dlouhodobějšího sledování délek časových mezer vhodných pro vkládání dodatečných tras ve splněných grafikonech vlakové dopravy a jejich statistickým vyhodnocením (metodami pro testování statistických hypotéz) bylo zjištěno, že se uvedené délky řídí Gama rozdělením pravděpodobnosti. Uvažujme, že ve výhledovém GVD je plánován rozsah vlakové dopravy $N = 40$, průměrná doba obsazení traťové koleje jedním vlakem bude $t_{obs} = 6$ minut a pro zachování předepsané kvality dopravy je požadováno dodržení minimální časové mezery $z_{min} = 4$ minuty. Výpočetní doba je T =1 440 minut, doby výluk a stálých manipulací nebudou v modelovém příkladu uvažovány. Úkolem je vypočítat průměrný počet tras průměrných vlaků, které je možno dodatečně vložit do vyskytujících se časových mezer za výpočetní dobu T.

Podle Kroku 1 je třeba nejdříve ověřit, zda kapacita úseku umožňuje vkládání dodatečných tras. Uvedenou skutečnost lze ověřit prostřednictvím porovnání průměrné skutečné hodnoty časové mezery a minimální požadované hodnoty časové mezery, která je vyžadována pro likvidaci následků případných mimořádností v provozu.

K výpočtu hodnoty průměrné skutečné hodnoty časové mezery je třeba znát hodnotu výpočetní doby T, dobu výluk $T_{výl}$, stálých manipulací $T_{stál}$ celkovou dobu obsazení koleje T_{obs} a plánovaný rozsah vlakové dopravy N. Hodnoty T, $T_{výl}$, $T_{stál}$ a N jsou známy ze zadání, zbývá vypočítat $T_{obs} = t_{obs}\, N = 240$ minut.

Ze vztahu (3) pro hodnotu průměrné skutečné časové mezery vyplývá:

$$\bar{z}_{skut} = \frac{1\,440 - 240}{40} = 30\, minut. vlak^{-1}$$

Protože $z_{min} = 4$ minuty, tedy podle vztahu (2) platí $\bar{z}_{skut} > z_{min}$. Lze tedy konstatovat, že proces vkládání dodatečných tras je možno uskutečnit.

Podle zásad Kroku 2 je třeba dále vypočítat minimální doby potřebné pro vložení jedné, dvou, tří atd. dodatečných tras vlaků. V souladu s navrženou metodou bude k tomu použit obecný vztah (5). Podle uvedeného vztahu pro z_1, z_2, z_3 atd. platí:

$$z_1 = t_{obs} + 2\, z_{min} = 6 + 2 \cdot 4 = 14 \text{ min}$$

$$z_2 = 2\, t_{obs} + 3\, z_{min} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 24 \text{ min}$$

$$z_3 = 3\, t_{obs} + 4\, z_{min} = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = 34 \text{ min}$$

$$\ldots\ldots$$

Je patrné, že pro každou další vloženou trasu se hodnota nezbytné časové mezery zvyšuje o 10 minut.

Podle zásad metody budou dále vypočítány pravděpodobnosti případů výskytu časových mezer pro vložení jedné, dvou, tří atd. dodatečných tras vlaků (Krok 3). V souladu s popsanou metodou budou k tomu použity obecné vztahy (8) a (12). K výpočtu hodnot distribuční funkce Gama rozdělení pravděpodobnosti bude využit program MS Excel.

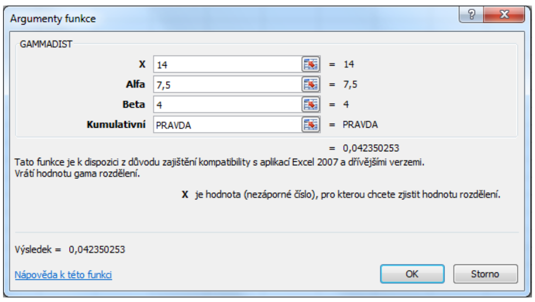
Ještě před tím však musíme odhadnout hodnoty parametrů Gama rozdělení pravděpodobnosti. K odhadu parametrů Gama rozdělení využijeme vztahů (14) a (15), viz např. publikace [2]:

$$a = \frac{\bar{z}_{skut}{}^2}{S^2} \tag{14}$$

$$b = \frac{\bar{z}_{skut}}{S^2} \tag{15}$$

Když např. předpokládáme výběrový rozptyl vyskytujících se skutečných hodnot časových mezer $S^2 = 120\, min^2$, dostáváme po dosazení do vzorců (14) a (15) hodnoty parametrů $a = 7{,}5$ a $b = 0{,}25$. Podle převodních pravidel uvedených pod vztahem (13) lze získat hodnoty $\alpha = a = 7{,}5$ a $\beta = \frac{1}{b} = 4$ pro přímé dosazení do funkce GAMMADIST.

Při výpočtu hodnoty distribuční funkce v bodě $z_1 = 14$ s využitím programu MS Excel je nutno položky v dialogovém okně vyplnit následovně, viz obrázek 2.



Obrázek 2: Dialogové okno pro výpočet hodnoty funkce GAMMADIST pro z_1

Vypočítané a na šest desetinných míst zaokrouhlené hodnoty funkce GAMMADIST pro hodnoty z_1 až z_{10} jsou uvedeny v Tabulce 1.

Tabulka 1: Hodnoty funkce GAMMADIST

k	z_k [min]	$F(z_k)$	k	z_k [min]	$F(z_k)$
1	14	0,04235	6	64	0,993562
2	24	0,320971	7	74	0,998734
3	34	0,681136	8	84	0,999775
4	44	0,892196	9	94	0,999963
5	54	0,971264	10	104	0,999994

Hodnoty pravděpodobností výskytů časových mezer pro vložení jedné až deseti dodatečných tras jsou shrnuty v tabulce 2. Hodnoty pravděpodobností jsou opět zaokrouhlovány na šest desetinných míst.

Tabulka 2: Hodnoty pravděpodobností výskytů časových mezer pro vložení $k = 1, \dots, 10$ dodatečných tras vlaků

k	$p_k = F(z_{k+1}) - F(z_k)$	k	$p_k = F(z_{k+1}) - F(z_k)$
1	0,278621	6	0,005173
2	0,360165	7	0,001041
3	0,21106	8	0,000188
4	0,079068	9	0,000031
5	0,22298	10	0,000004

Podle zásad metody jsou dále vypočítány teoretické četnosti výskytů časových mezer pro vložení jedné, dvou, tří atd. dodatečných tras vlaků (Krok 4). V souladu s navrženou metodou bude k tomu použit obecný vztah (9). Výsledky výpočtu jsou shrnuty v Tabulce 3.

Tabulka 3: Hodnoty teoretických četností výskytů časových mezer pro vložení k dodatečných tras vlaků

k	h_k	k	h_k
1	11,144828	6	0,206905
2	14,406586	7	0,041630
3	8,4424199	8	0,007517
4	3,1627023	9	0,001247
5	0,8919281	10	0,000193

Celkový průměrný počet dodatečně vložených tras průměrných vlaků lze potom vypočítat dosazením hodnot z tabulky 3 do vztahu (10), přičemž výsledný počet tras získáme zaokrouhlením vypočítané hodnoty počtu tras průměrných vlaků, které je možno dodatečně vložit do vyskytujících se časových mezer za výpočetní dobu T, na nejbližší nižší celočíselnou hodnotu (což je při kapacitních výpočtech obvyklé):

$$N_{dod} = \sum_{k=1}^{10} k\, h_k = 84 \text{ tras}.T^{-1}$$

Původní předpokládaný rozsah vlakové dopravy ve výhledovém GVD činil 40 vlaků, celkový průměrný počet dodatečně vložených průměrných tras vlaků činí 84 za výpočetní dobu. Propustná výkonnost mezistaničního úseku za výpočetní dobu

1 440 min tedy činí 124 tras průměrných vlaků. Celková průměrná doba obsazení úseku všemi trasami činí 744 minut, celková průměrná doba mezer po doplnění tras činí 696 minut, tzn., že na jednu průměrnou trasu tak nově připadá skutečná průměrná časová mezera ve výši 5,61 minuty. Rozdíl mezi hodnotou vypočítané skutečné průměrné časové mezery 5,61 min a minimální hodnoty časové mezery ve výši 4 minuty si lze vysvětlit např. tak, že ve výpočtu již nebylo zvažováno s využíváním časových mezer vhodných pro vložení více než deseti dodatečných tras průměrných vlaků (uvedené časové mezery se budou vyskytovat s četnostmi blízkými nule, proto nebyly při výpočtu zohledněny).

Závěr

Prezentovaný článek se zabývá výpočetním postupem, na základě kterého lze prověřit kapacitní možnosti jednosměrně pojížděných traťových kolejí metodou vkládání dodatečných tras s využitím teoretických četností mezer pro výhledové GVD bez nutnosti splnění předpokladu, že délky časových mezer vhodných pro vložení dodatečných tras vlaků se řídí exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti. Článek z původní metody preparuje obecný postup aplikovatelný na libovolné rozdělení pravděpodobnosti, tzn. např. i bez ohledu na to, zda primitivní funkce k hustotě pravděpodobnosti existuje či nikoliv.

Návrhová část ukazuje, jak lze obecné části původní metody využít v případech, kdy se délky časových mezer vhodných pro vkládání dodatečných tras řídí Gama rozdělením pravděpodobnosti, které je, na jednu stranu, matematickým zobecněním exponenciálního rozdělení pravděpodobnosti (zvyšuje variabilitu navržené metody), na druhou však stranu komplikuje přesnost výpočtu, neboť hodnoty distribuční funkce lze získat pouze numericky.

Navržený přístup je obecně využitelný, je tedy využitelný i v případech, kdy se délky mezer řídí jinými, než exponenciálním a Gama rozdělením pravděpodobnosti. Při numerickém výpočtu hodnot distribuční funkce je v případech, kdy se délky časových mezer řídí jiným než Gama rozdělením pravděpodobnosti, pochopitelně nutno použít jinou z předdefinovaných distribučních funkcí v programu MS Excel odpovídající otestovanému a nezamítnutému rozdělení pravděpodobnosti.

Poděkování

Autor článku děkuje Ing. Pavlovi Krýže, Ph.D. z Odboru základního řízení provozu SŽDC, s. o. za věcné připomínky k předloženému článku.

Literatura:

[1] BRANDALÍK, F. *Dopravní provoz železnic II*. Bratislava: ALFA, 1970. 200 s.

[2] BRANDALÍK, F. – KLUVÁNEK, P. Operační analýza v železniční dopravě. Bratislava: ALFA, 1984. 498 s.

[3] DANĚK, J. – VONKA, J. *Dopravní provoz železnic*. Bratislava: ALFA, 1988. 400 s. ISBN 063-565-88.

[4] GAŠPARÍK J. – ŠULKO, P. *Technológia železničnej dopravy – líniové dopravné procesy*. Žilina: EDIS, 2016. 383 s. ISBN 978-80-554-1171-2

[5] MOLKOVÁ, T. – MOJŽÍŠ, V. – BULÍČEK, J. – DRDLA, P. – HRUBAN, I. – MAZAČ, P. – ZEMAN, A. *Kapacita železničních tratí*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2010. 150 s. ISBN 978-80-7395-317-1.

[6] SVOBODA, V. *Stanovení propustné výkonnosti tratí pomocí teorie hromadné obsluhy*. Praha: ÚKDŽ, 1975. 108 s.

Praha, listopad 2016

Lektorovali:

prof. Ing. Jan Daněk, CSc.
Fakulta strojní, VŠB – TU Ostrava

doc. RNDr. Štefan Peško, CSc.
Fakulta riadenia a informatiky, ŽU v Žilině

Ing. Pavel Krýže, Ph.D.
SŽDC, s.o.

DODATEK

Text dodatku byl zpracován s využitím publikací [3] a [6].

Jak již bylo uvedeno, dosavadní texty věnované výpočetní metodě předpokládají, že časové mezery vhodné pro vkládání dodatečných tras se řídí exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti, tj. rozdělením popsaným hustotou pravděpodobnosti:

$$\begin{aligned} f(z) &= be^{-bz} \quad \text{pro } z \geq 0, b > 0 \\ f(z) &= 0 \quad \text{jinde} \end{aligned} \tag{16}$$

přičemž pro střední hodnotu platí:

$$\bar{z} = \frac{1}{b} \tag{17}$$

přičemž ze vztahu (17) ihned vyplývá vztah:

$$b = \frac{1}{\bar{z}} \tag{18}$$

Předpokládejme dále, že podmínka pro vkládání dodatečných tras uvedená v kroku 1 je splněna, postup ve výpočetním kroku 2 zůstává nezměněn a lze tedy přejít přímo ke kroku 3.

V Kroku 3 se podle vztahů (6), (7) a (8) vypočítají jednotlivé integrály vyjadřující pravděpodobnosti výskytů časových mezer:

pro vložení jedné dodatečné trasy lze psát:

$$p_1 = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\bar{z}}\, e^{-\frac{z}{\bar{z}}} dz = \frac{1}{\bar{z}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z}{\bar{z}}} dz = \frac{1}{\bar{z}} \left[-\bar{z} e^{-\frac{z}{\bar{z}}} \right]_{z_1}^{z_2} = e^{-\frac{z_1}{\bar{z}}} - e^{-\frac{z_2}{\bar{z}}}$$

analogicky, pro vložení 2 dodatečných tras lze psát:

$$p_2 = \int_{z_2}^{z_3} \frac{1}{\bar{z}}\, e^{-\frac{z}{\bar{z}}} dz = \frac{1}{\bar{z}} \left[-\bar{z} e^{-\frac{z}{\bar{z}}} \right]_{z_2}^{z_3} = e^{-\frac{z_2}{\bar{z}}} - e^{-\frac{z_3}{\bar{z}}}$$

a konečně pro vložení k dodatečných tras (kde $k \in Z^+$) lze psát:

$$p_k = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{1}{\bar{z}}\, e^{-\frac{z}{\bar{z}}} dz = \frac{1}{\bar{z}} \left[-\bar{z} e^{-\frac{z}{\bar{z}}} \right]_{z_k}^{z_{k+1}} = e^{-\frac{z_k}{\bar{z}}} - e^{-\frac{z_{k+1}}{\bar{z}}} \tag{19}$$

Ukážeme nyní druhý přístup, jak získat vztah (19). Pro výpočet použijeme výše zmiňované známé univerzální pravidlo (12). Při znalosti vztahu pro výpočet hodnoty distribuční funkce exponenciálního rozdělení pravděpodobnosti v bodě z:

$$\begin{gathered} F(z) = 1 - e^{-bz} \quad \text{pro } z \geq 0, b > 0 \\ F(z) = 0 \quad \text{jinde} \end{gathered} \tag{20}$$

lze podle vztahu (20) pro $F(z_k)$

$$F(z_k) = 1 - e^{-bz_k}$$

analogicky pro $F(z_{k+1})$

$$F(z_{k+1}) = 1 - e^{-bz_{k+1}}$$

a tedy pro hledanou pravděpodobnost

$$P(z_k \leq Z < z_{k+1}) = 1 - e^{-bz_{k+1}} - [1 - e^{-bz_k}]$$

po úpravě potom (21)

$$P(z_k \leq Z < z_{k+1}) = e^{-bz_k} - e^{-bz_{k+1}} \tag{21}$$

a po dosazení vztahu (18) do vztahu (21) také

$$P(z_k \leq Z < z_{k+1}) = e^{-\frac{z_k}{\bar{z}}} - e^{-\frac{z_{k+1}}{\bar{z}}}$$

což odpovídá již odvozenému vztahu (19).

Následuje postup ke Kroku 4. Pro výpočet teoretické četnosti výskytu mezery pro vložení k dodatečných tras (kde $k \in Z^{+}$) v případě exponenciálního rozdělení pravděpodobnosti platí:

$$h_k = N\left(e^{-\frac{z_k}{\bar{z}}} - e^{-\frac{z_{k+1}}{\bar{z}}}\right)$$

Následuje Krok 5 obsahující odvození průměrného počtu tras, které bude možno dodatečně vložit za výpočetní dobu. Vyjdeme ze vztahu (10) a po dosazení za h_k můžeme psát

$$N_{dod} = N\sum_{k=1}^{\infty} k\,\left(e^{-\frac{z_k}{\bar{z}}} - e^{-\frac{z_{k+1}}{\bar{z}}}\right)$$

Po úpravě lze uvedený vztah napsat také v ekvivalentním tvaru:

$$N_{dod} = N\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{z_k}{\bar{z}}} \tag{22}$$

Připomeňme nyní vztah (5).

$$z_k = k\,t_{obs} + (k+1)\,z_{min}$$

kde $k \in Z^{+}$.

Položíme-li $t_{obs} + z_{min} = \tau$, potom platí:

$$z_2 = 2\,t_{obs} + 3\,z_{min} = \underbrace{t_{obs} + 2\,z_{min}}_{z_1} + \underbrace{t_{obs} + z_{min}}_{\tau} = z_1 + \tau$$

$$z_3 = 3\,t_{obs} + 4\,z_{min} = \underbrace{t_{obs} + 2\,z_{min}}_{z_1} + 2\,\underbrace{t_{obs} + 2z_{min}}_{2\tau} = z_1 + 2\tau$$

a tedy, analogicky, vztah (5) ve tvaru:

$$z_k = k\,\tau + (k+1)z_{min} = z_1 + (k-1)\tau$$

Potom lze vztah (22) upravovat následovně:

$$N_{dod} = N\left(e^{-\frac{z_1}{\bar{z}}} + e^{-\frac{z_1+\tau}{\bar{z}}} + e^{-\frac{z_1+2\tau}{\bar{z}}} + \cdots\right)$$

což se dá rozepsat také do tvaru:

$$N_{dod} = N\left(e^{-\frac{z_1}{\bar{z}}} + e^{-\frac{z_1}{\bar{z}}}e^{-\frac{\tau}{\bar{z}}} + e^{-\frac{z_1}{\bar{z}}}e^{-\frac{2\tau}{\bar{z}}} + \cdots\right) \tag{23}$$

Výraz v závorce reprezentuje nekonečnou geometrickou řadu. Pro náhradu nekonečného součtu konečným výrazem je třeba znát její první člen a kvocient. Prvním členem řady je $a_1 = e^{-\frac{z_1}{\bar{z}}}$, kvocientem $q = e^{-\frac{\tau}{\bar{z}}}$. Protože platí, že $\left|e^{-\frac{\tau}{\bar{z}}}\right| < 1$, nekonečná geometrická řada konverguje. Při využití známého vztahu pro součet nekonečné geometrické řady ve tvaru $\frac{a_1}{1-q}$, ve kterém je a_1 první člen řady a q její kvocient, lze potom vztah (22) pro výpočet N_{dod} přepsat do tvaru:

$$N_{dod} = N \frac{e^{-\frac{z_1}{\bar{z}}}}{1 - e^{-\frac{\tau}{\bar{z}}}}$$

což již odpovídá vztahu (1), jehož platnost bylo třeba dokázat.