

## Využití moderních matematických postupů při analýze dynamických účinků od kolejové dopravy

Klíčová slova: *dynamické účinky, kolejová doprava, lineární a nelineární časově frekvenční transformace.*

### 1. Úvod

Kmitání železničního svršku je ovlivňováno jeho kvalitou, provozně stavebními podmínkami, klimatickými jevy a zejména pak dynamickým zatěžováním od dvojkolí kolejových vozidel. Některé dynamické charakteristiky železničního a tramvajového svršku se dají snadno zprostředkovaně měřit snímači zrychlení (případně rychlosti, či výchylky kmitání) umístěnými v různých místech na kolejnici, pražci a kolejnicovém upevnění, případně přímo ve šterkové vrstvě. Znalost veličin charakterizujících dynamické děje probíhající v konstrukci koleje umožňuje důkladnou analýzu, která může být důležitá pro následnou optimalizaci stavebních a provozních podmínek, dále pro sestavování matematických modelů apod.

Informace o jakémkoliv technickém či fyzikálním ději je v signálu reprezentována časovými změnami okamžité hodnoty fyzikální veličiny, kterou signál popisuje. Přímé vyhodnocení časově-amplitudové reprezentace není v mnoha aplikacích snadné ani výhodné. Proto se provádí transformace signálu z časové do jiné oblasti. V některých případech lze získat důležité informace ve frekvenční oblasti. Pro přechod do této oblasti se používají různé druhy transformací a různé výpočetní metody. Pro převod z časové do frekvenční oblasti je nejpoužívanější a nejnámější metodou Fourierova transformace a její některé modifikace.

Fourierova transformace, případně její modifikace a některé parametrické metody jsou však techniky zvláště vhodné ke zpracování stacionárních (nejlépe ergodických nebo periodických) signálů. Mohou být využity i pro analýzu nestacionárních signálů, pokud nás

---

<sup>1</sup> **Dr. Ing. Jaroslav Smutný**, nar. 1961, Absolvent FEL VUT Brno. Doktorská práce Moderní metody analýzy hluku a vibrací aplikované na kolejovou dopravu. V současné době pracuje jako odborný asistent na VUT FAST Ústav železničních konstrukcí a staveb.

zajímají pouze frekvenční komponenty obsažené v celém signálu. Nedávají nám přehled o časovém výskytu důležitých frekvenčních složek.

Pro určení časové lokalizace frekvenčních komponent, je nutné využít jiné transformační postupy a jiné výpočetní metody.

Jedním z možných postupů, jak analyzovat časový výskyt frekvenčních složek nestacionárních signálů, je použití tzv. časově frekvenčních postupů (transformací). Ty mohou být rozděleny do dvou základních tříd podle výpočetního postupu (obr. 1):

- lineární (zahrnují zejména krátkodobou Fourierovu transformaci a transformace Wavelet)
- nelineární (zahrnují zejména kvadratické Cohenovy, afinní a hyperbolické transformace)



analyzovaného signálu (zaznamenaného např. při měření časového průběhu zrychlení) na elementární časově frekvenční jednotky. Signál tedy může být v časově frekvenční rovině prezentován jako  $N$  čtená suma dle rovnice

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot \phi_k(t), \quad (1)$$

kde  $x(t)$  je signál,  $\phi_k(t)$  jsou časově frekvenční jednotky (základní funkce) a  $a_k$  odpovídající koeficienty. Časově frekvenční poloha těchto základních funkcí a amplituda jejich koeficientů popisují signál v časově frekvenční rovině.

Výhodou těchto lineárních transformací je zejména rychlost výpočtu a uspokojiví časově frekvenční rozlišení. Hlavní nevýhodou lineárních transformací je skutečnost, že výsledné rozlišení v čase a frekvenci je limitováno tzv. Heisenbergovým principem

---

<sup>2</sup> **Doc. Ing. Luboš Pazdera, CSc.**, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební. Ústav fyziky.

neurčitosti. Složka signálu nemůže být prezentována jako bod v časově-frekvenčním prostoru. Je možné pouze určit její výskyt uvnitř obdélníka  $\Delta t \cdot \Delta f$  v dané časově-frekvenční oblasti ( $\Delta t$  představuje jistý minimální časový interval,  $\Delta f$  představuje minimální frekvenční interval).

Z nelineárních postupů se v praxi dnes uplatňují zejména kvadratické metody. Ty představují druhou základní třídu časově frekvenčních transformací. Důležitou podtřídou kvadratických transformací jsou tzv. Cohenovy transformace. Jde o všechny časově frekvenční postupy, které jsou kovariantní k časovému a frekvenčnímu posunutí. Kvadratické časově frekvenční transformace kovariantní k časovému posunutí a posunutí měřítka tvoří tzv. afinní transformace. Velmi známou metodou je Wigner-Villeho transformace, dle výpočetního algoritmu, patřící na rozhraní Cohenových a afinních transformací. Charakteristickým rysem všech kvadratických transformací je skutečnost, že jejich výsledné rozlišení v čase a frekvenci není limitováno tzv. Heisenbergovým principem neurčitosti.

### 1. Lineární časově frekvenční transformace

Jedním z možných postupů, jak analyzovat časový výskyt frekvenčních složek nestacionárních signálů získaných při měření vibrací, je použití jisté modifikace Fourierovy transformace (FT), nazývané krátkodobá Fourierova transformace (STFT - Short Time Fourier Transform).

STFT lokalizuje frekvenční složky v čase s konstantním (lineárním) rozlišením. Základním principem je rozdělení signálu na dostatečně malé realizace, u nichž je možno předpokládat dostatečnou stacionaritu (ergodicitu). To je provedeno multiplikací jisté okénkové funkce a signálu. Na každém takovém výřezu je provedena Fourierova transformace (FT). Okénko se posouvá v čase. STFT poskytuje kompromis mezi časovou a frekvenční reprezentací signálů. Její definiční integrál je

$$STFT_X^{(\omega)}(t', f) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) \cdot g^*(t - t')] \cdot e^{-j2\pi f(t-t')} \cdot dt, \quad (2)$$

kde  $g$  je okénková funkce, '\*' komplexní konjunkce,  $t'$  časové posunutí okénka,  $x(t)$  je časová reprezentace signálu.

Protože STFT je počítána Fourierovou transformací okénkem upraveného signálu, je při prezentaci výsledků často používán přepočítání na spektrální výkon nebo spektrální výkonovou hustotu.

Další z moderních lineárních metod řešících problémy rozlišení v časové, frekvenční a časově-frekvenční doméně je transformace Wavelet (dále WT). Tato transformace je relativně novou metodou vhodnou pro analýzu nestacionárních a rychle se měnících signálů. Obdobně jako STFT, také WT lokalizuje výskyt frekvenčních složek u nestacionárních signálů v čase. WT poskytuje tzv. analýzu signálu s vícenásobným rozlišením, která se provádí aplikací postupně rozšiřované okénkové funkce. Pro analýzu vysokých frekvencí se používá úzké okno a naopak pro analýzu nízkých frekvencí okno široké. Signál je při této transformaci rozložen do sady jistých funkcí (zvaných waveletů). Základní funkcí transformace je tzv. mateční wavelet. Další funkce jsou odvozovány z matečního waveletu jeho postupným rozšiřováním a posunem v čase. Originální signál může být rekonstruován inverzní transformací Wavelet. Spojitá Wavelet transformace je definována integrální rovnicí

$$WT(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \psi_{\tau, s}^*(t) \cdot dt, \quad (3)$$

kde

$$\psi_{\tau, s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \Psi\left(\frac{t - \tau}{s}\right). \quad (4)$$

Parametr  $\tau$  představuje časové posunutí,  $s$  je měřítko,  $\Psi$  je transformační funkce, která se nazývá základní nebo-li mateční wavelet,  $x(t)$  je analyzovaný signál. Mateční wavelet  $\Psi$  je vlastně prototyp pro vygenerování jisté okénkové funkce  $\psi_{\tau, s}$ . Wavelety generované z matečního waveletu mají rozdílné měřítko  $s$  a rozdílnou pozici  $\tau$  (posunutí), ale obdobný tvar. Substitucí rovnice (4) do rovnice (3) vznikne následující vztah (5), který reprezentuje korelaci mezi vstupním signálem  $x(t)$  a funkcí wavelet  $\psi$  (resp.  $\Psi$ ).

$$WT(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \Psi^*\left(\frac{t - \tau}{s}\right) \cdot dt \quad (5)$$

Pojem časové posunutí  $\tau$  je použit ve stejném významu jako u STFT. Jedná se o relativní posun waveletu k signálu. Parametr zvaný měřítko  $s$  je v transformaci Wavelet srovnatelný s pojmem měřítko v kartografii. Vysoká měřítka korespondují s globálním pohledem, malá měřítka pak poskytují detailnější pohled. Obdobně nízké frekvence (vysoká měřítka) korespondují s globální informací o signálu, zatímco vysoké frekvence (nízká měřítka) korespondují s detailní informací o signálu.

## 2. Nelineární transformace

Wignerovo spektrum (WS) je alternativní metoda k lineárním časově frekvenčním postupům zvláště pro nestacionární nebo rychle se měnící přechodové signály. Wignerovo spektrum je definováno pro časově frekvenční oblast vztahem

$$W_f(t', f) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{t'}{2}\right) \cdot x^*\left(t - \frac{t'}{2}\right) \cdot e^{(-j2\pi ft)} \cdot dt, \quad (6)$$

kde “\*” je komplexní konjugace,  $t$  je čas,  $t'$  představuje posunutí podél časové osy,  $x$  je časová reprezentace signálu.

Z rovnice (6) plyne, že se v podstatě jedná o Fourierovu transformaci vztahu  $x(t'+t/2) \cdot x^*(t'-t/2)$ , tedy funkce  $x(t/2)$  a k ní komplexně sdružené funkce  $x^*(-t/2)$  v jistém časovém posunutí. Zjednodušeně lze říci, že Wignerovo spektrum je kombinace Fourierovy transformace a autokorelačního výpočtu.

Na rozdíl od lineárních metod, u kterých je rozlišení omezeno jistou okénkovou funkcí, Wignerovo spektrum poskytuje výborné rozlišení jak ve frekvenční, tak i v časové oblasti. Je to proto, že se jedná o obecnější transformaci, která nevyužívá vážící funkci.

Při porovnání výpočtu lineárními postupy a metodou Wignerova spektra lze konstatovat, že při výpočtu Wignerova spektra je potřeba provést větší počet matematických operací. Přestože Wignerovo spektrum poskytuje výborné časové i frekvenční rozlišení v časově frekvenční oblasti, jistou nevýhodou, obzvláště při zpracování signálů s velkým počtem vzorků (řádově  $N > 10^4$ ), je dlouhá doba výpočtu (při použití v současné době u nás dostupných výpočetních systémů) a potřeba větší operační paměti počítače. I přes toto omezení je Wignerovo spektrum vhodné pro zpracování a analýzu technických signálů a to jak stacionárních tak i nestacionárních.

Pro praktické potřeby analýzy signálů od kolejové dopravy je velmi dobře použitelná třída Cohenových transformací, která je definována vztahem

$$C_x(t, \omega; \psi) = \left(\frac{1}{2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot \iiint e^{-j \cdot \theta \cdot t - j \cdot \tau \cdot \omega + j \cdot \theta \cdot u} \cdot \psi(\theta, \tau) \cdot x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cdot du \cdot d\tau \cdot d\theta, \quad (7)$$

kde symbol  $x$  představuje signál,  $t$  je čas,  $\tau$  je časové posunutí,  $\omega$  úhlová frekvence,  $\theta$  frekvenční posunutí a  $\psi(\theta, \tau)$  je jádrová funkce příslušné transformace. Pro transformace Wigner, Rihaczek, Page and Choi-Williams, které všechny patří do Cohenovy třídy, se dá odvodit korespondující jádrová funkce:

$$\begin{aligned}
\psi(\theta, \tau) &= 1 \\
\psi(\theta, \tau) &= e^{\frac{j \cdot \theta \cdot \tau}{2}} \\
\psi(\theta, \tau) &= e^{\frac{j \cdot \theta \cdot |\tau|}{2}} \\
\psi(\theta, \tau) &= e^{\frac{-\theta^2 \cdot \tau^2}{\sigma}}
\end{aligned} \tag{8}$$

Koeficienty  $C_x(t, \omega; \psi)$  mohou být interpretovány jako dvourozměrná Fourierova transformace vážená autokorelační funkcí zpracovávaného signálu. Rovnice (7) se pak dá přepsat do tvaru

$$C_x(t, \omega) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \iint A_x(\theta, \tau) \cdot \psi(\theta, \tau) \cdot e^{-j \cdot \tau \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \theta \cdot t} \cdot d\tau \cdot d\theta, \tag{9}$$

kde  $A_x(\theta, \tau)$  je autokorelační funkce signálu  $x(t)$  daná rovnicí

$$A_x(\theta, \tau) = \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cdot e^{j \cdot \theta \cdot t} \cdot dt. \tag{10}$$

Poznamenejme, že všechny integrály jsou nevládní, tj. od  $-\infty$  do  $+\infty$ . Vážící funkce  $\psi(\theta, \tau)$  se často nazývá jádrovou funkcí. Jádrová funkce jednoznačně určuje vlastnosti dané transformace. Součin  $A_x(\theta, \tau) \cdot \psi(\theta, \tau)$  je znám pod názvem charakteristická funkce. Protože autokorelační funkce představuje bilineární operaci na zpracovávaném signálu, objevují se ve výsledném zobrazení příspěvky od křížových komponent, které pak zhoršují výsledné rozlišení. Tento efekt je možné omezit vhodnou volbou jádrové funkce (viz. rovnice 8).

### 3. Analýza laboratorních měření

Popsané časově frekvenční transformace byly použity k analýze signálu získaného aplikací mechanického rázu na kolejnici. Tohoto postupu bylo použito za účelem testování akusticko vibračních vlastností upevnění kolejnic. K testování vlastností prezentovaných transformací bylo použito zkušební kolejevého roštu o celkové délce 2,5 m, který byl umístěn v mechanické laboratoři Ústavu železničních konstrukcí a staveb Fakulty stavební Vysokého učení technického v Brně. Tento rošt byl sestaven z betonových pražců B 91, na nichž byly upevněny kolejnice konstrukčního tvaru UIC 60 s pružným upevněním VOSSLOH. Odezva na mechanický ráz byla měřena soupravou s kostkovým akcelerometrickým snímačem pro modální a strukturální analýzu od firmy Brüel&Kjaer umístěným na patě kolejnice a na pražci v blízkosti kolejnicového upevnění. Vzorkovací frekvence byla zvolena 10 kHz. Výsledkem měření byl nasnímaný a digitálně zaznamenaný elektrický signál úměrný hladině zrychlení v místě uchycení každého snímače.

Časový průběh zrychlení zaznamenaný akcelerometrickým snímačem umístěným na patě kolejnice je zobrazen v horním grafu obr. 2. Maximální kladná hodnota zrychlení cca  $3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  je dosažena jako první výchylka (cca 26 ms od uvažovaného začátku). Maximální záporná hodnota zrychlení cca  $3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  je zachycena cca 28 ms od uvažovaného začátku. Předpokládaný útlum signálu ze zrychlení  $3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  na zrychlení menší než  $0,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  je za 20 ms.

V levém grafu obr. 2 je zobrazena spektrální výkonová hustota této odezvy vypočítaná přímou aplikací Fourierovy transformace. V grafu jsou patrné čtyři význačné frekvence (1,9 kHz, 3,3 kHz, 4,3 kHz, 4,9 kHz). Poznamenejme, že jako význačné hodnoty jsou brány ty, které mají útlum do 20 dB od maximální hodnoty spektrální výkonové hustoty.

Spektrální výkonová hustota vypočtená aplikací spojitě transformace Wavelet na měřený signál je zobrazena v prostředním grafu obr. 2. Jak ukazuje tento graf, časový průběh význačných frekvenčních komponent se podstatně liší. Frekvenční složka 1,9 kHz nabývá nejvyšších hodnot a to po relativně (vzhledem k ostatním frekvenčním složkám) dlouhou dobu. Vyskytuje se v signálu téměř v jeho celém průběhu, tedy cca 20 ms (tj. do času 42 ms od uvažovaného začátku) při útlumu do 20 dB. Ostatní význačné frekvence 3,3 kHz, 4,3 kHz a 4,9 kHz jsou v signálu výrazné po dobu 8 ms až 10 ms, tedy přibližně polovinu doby trvání nejvýznačnější frekvenční složky. Připomeňme, že jako význačné hodnoty jsou brány ty, které mají útlum do 20 dB od maximální hodnoty spektrální výkonové hustoty.

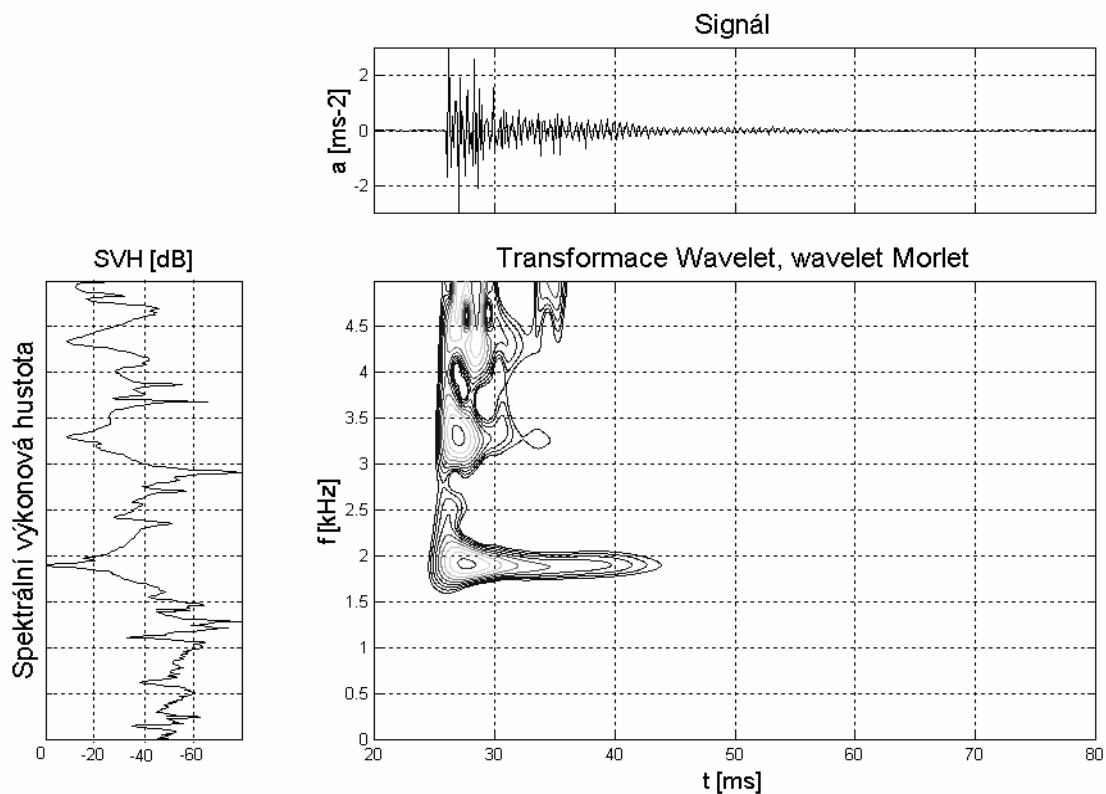
Signál (resp. odezva na mechanický ráz) sejmutý druhým snímačem na betonovém pražci v blízkosti upevnění kolejnice má odlišný charakter. Z časového záznamu (viz. horní graf obr. 3) je patrné, že maximální amplituda zrychlení nabývá nižších hodnot vlivem postupu vlnění přes upevnění kolejnice a pražec až k akcelerometrickému čidlu a dosahuje hodnoty cca  $0,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Její maximální výchylka je 2 ms od prvního náběhu "balíku amplitud". Hodnoty zrychlení jsou podstatně nižší, než u snímače umístěného na patě kolejnice (obr. 2), který byl umístěn blíže u zdroje mechanického impulsu. V levém grafu obr. 3 je zobrazena spektrální výkonová hustota této odezvy vypočítaná přímou aplikací Fourierovy transformace. Průběh spektrální výkonové hustoty se výrazně odlišuje od charakteristik naměřených prvním snímačem umístěným na patě kolejnice. Maximální hodnota spektrální výkonové hustoty je na nižší frekvenci 150 Hz. V porovnání s prvním snímačem jsou zde rovněž patrné význačné extrémy na frekvencích 1,9 kHz, 3,3 kHz. Ve spektru se objevují dále frekvenční složky 700 Hz, 3,8 kHz a 4,1 kHz s útlumem do 20 dB v porovnání s maximální hodnotou spektrální výkonové hustoty.

Spektrální výkonová hustota vypočtená aplikací spojitě transformace Wavelet na měřený signál je zobrazena v prostředním grafu obr. 3. Nejvyšších hodnot nabývá spektrální výkonová hustota na frekvencích 150 Hz a 700 Hz, což je v souladu se zobrazením spektrální výkonové hustoty dle levého grafu obr. 3. Jejich časový průběh se však liší. Frekvenční složka 150 Hz se vyskytuje v signále po dobu 35 ms, složka 700 Hz po dobu 18 ms a složka 1,9 kHz při útlumu do 20 dB se vyskytuje v signálu po dobu cca 12 ms. Ostatní frekvenční složky nejsou z hlediska svého časového výskytu příliš významné.

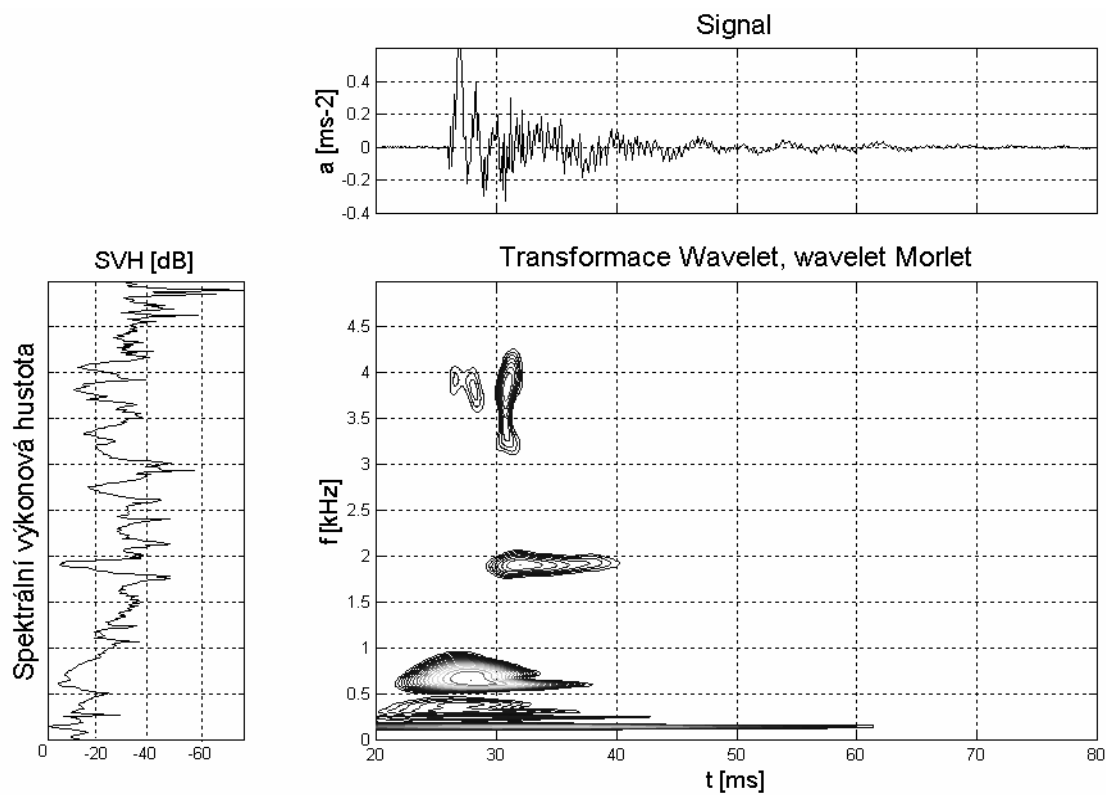
Porovnáním spektrální výkonové hustoty transformace Wavelet signálu ze snímače umístěného na pražci (obr. 3) a ze snímače umístěného na kolejnici (2) je patrné významné posunutí extrémních hodnot k nižším frekvencím. Výrazně převažují maxima pod 1 kHz. Zvláště frekvence 150 Hz má dlouhou dobu trvání (35 ms) při útlumu menším než 20 dB. Obě charakteristiky mají význačnou složku na 1,9 kHz, u signálu ze snímače umístěném na pražci s nižší dobou trvání 12 ms.

Obdobné závěry jsou zřetelné u obr. 4 a obr. 5, které představují analýzu měřených signálů pomocí transformace Rihaczek, která patří do kategorie kvadratických časově frekvenčních postupů. Z obr. 4 a obr. 5 je patrné, že na rozdíl od lineárních metod, u kterých je rozlišení omezeno jistou okénkovou funkcí, kvadratické metody poskytují výborné rozlišení jak ve frekvenční, tak i v časové oblasti. Vyšší rozlišení umožňuje lepší lokalizaci význačných frekvenčních komponent. v čase. Kvalita časového i frekvenčního rozlišení při zpracování signálu odezvy na mechanický ráz je u transformace Rihaczek zabezpečena vhodnou volbou jádrové a autokorelační funkce.

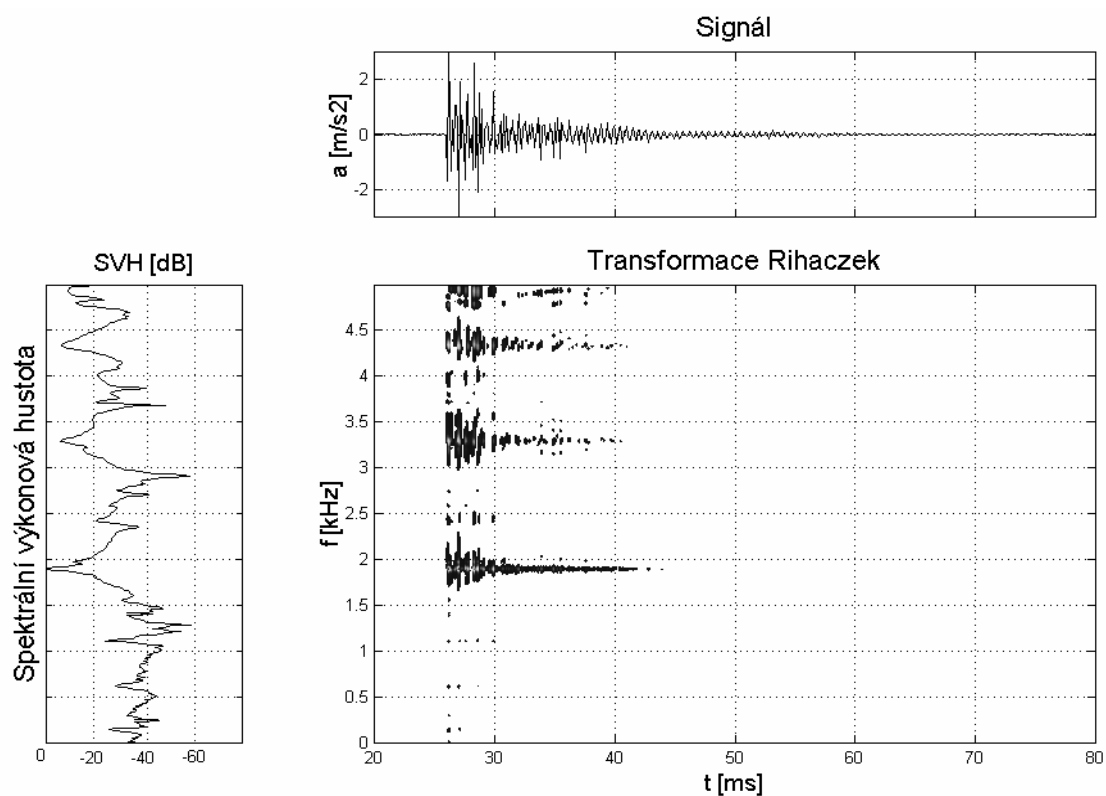




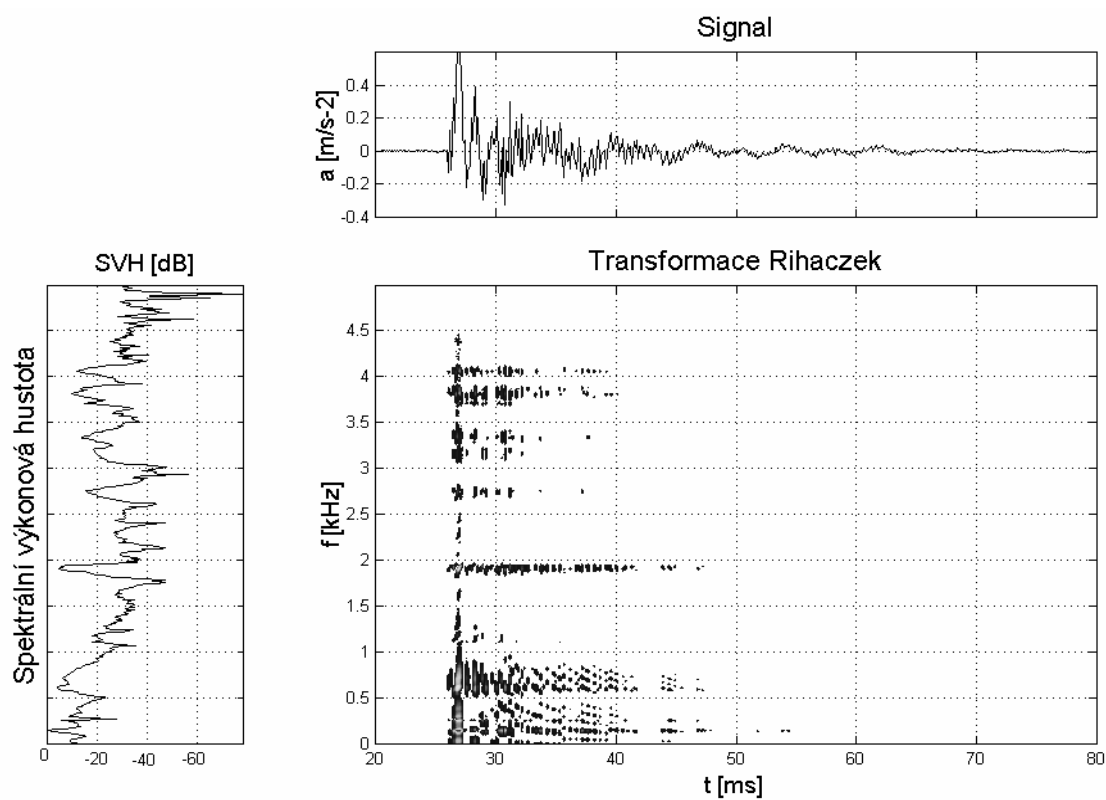
**Obr. 2** Snímač umístěný na patě kolejnice kolejového roštu s betonovými pražci, časově frekvenční analýza metodou Wavelet



**Obr. 3** Snímač umístěný na pražci v blízkosti kolejnicového upevnění kolejového roštu s betonovými pražci, časově frekvenční analýza metodou Wavelet



Obr. 4 Snímač umístěný na patě kolejnice kolejového roštu s betonovými pražci, časově frekvenční analýza metodou Rihaczek



Obr. 5 Snímač umístěný na pražci v blízkosti kolejnicového upevnění kolejového roštu s betonovými pražci, časově frekvenční analýza metodou Rihaczek

#### 4. Analýza měření v terénu

Prezentované časově frekvenční transformace byly rovněž použity k analýze signálů získaných při reálných měřeních v terénu. Na obr. 6 je uvedena analýza zrychlení kmitání ve šterkovém loži při využití měřicího kamene. Jde o zabudovaný snímač zrychlení v odštěpku horniny ve tvaru zrna šterkového lože. Měřicí kámen byl umístěn v místě upevnění kolejnice v hloubce cca 15 cm pod spodním okrajem pražce. Zkušební měření bylo realizováno v přímém traťovém úseku mezi městy Český Brod – Poříčany. Na této trati je instalován svršek s kolejnicemi UIC 60, betonovými pražci typu B91 a kolejnicovým upevněním VOSSLOH. Analýza byla omezena na vertikální směr. Na obr. 6 jsou zobrazeny výsledky měření a analýz získané průjezdem vlakové soupravy Dvořák při rychlosti cca  $120 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ .

Časový průběh zrychlení zaznamenaný akcelerometrickým snímačem je zobrazen v horním grafu obr. 6. Maximální dosažené hodnoty zrychlení se pohybují od  $-4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  do  $4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . V levém grafu obr. 6 je zobrazena spektrální výkonová hustota vypočítaná přímou aplikací Fourierovy transformace na časový záznam zrychlení. Z grafu jsou patrné čtyři význačné frekvence (120 Hz, 150 Hz, 170 Hz, 200 Hz). Ostatní složky jsou méně významné.

Spektrální výkonová hustota vypočtená aplikací spojité transformace Wavelet na měřený signál je zobrazena v prostředním grafu obr. 6. Jak ukazuje i tento graf, časový průběh (a tedy i útlum) význačných frekvenčních komponent se podstatně liší.

Další obr. 7 ukazuje časově frekvenční analýzu metodou krátkodobé Fourierovy transformace (STFT). Měření chvění bylo provedeno při pojezdu tramvaje typu T3 (kola konstrukce ČKD) smyčkou (kolejnice žlábková NP 4, dřevěné pražce, zásyp šterkem po hlavu kolejnice, poloměr oblouku 30 m) bez pasažérů a konstantní rychlostí při vypnuté pohonné jednotce. Rychlost pojezdu vozidla byla  $15 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ . Chvění bylo snímáno akcelerometrickým snímačem (kostkový snímač zrychlení typ 4500 firmy Brüel&Kjaer) umístěným na patě kolejnice ve středu mezi pražci.

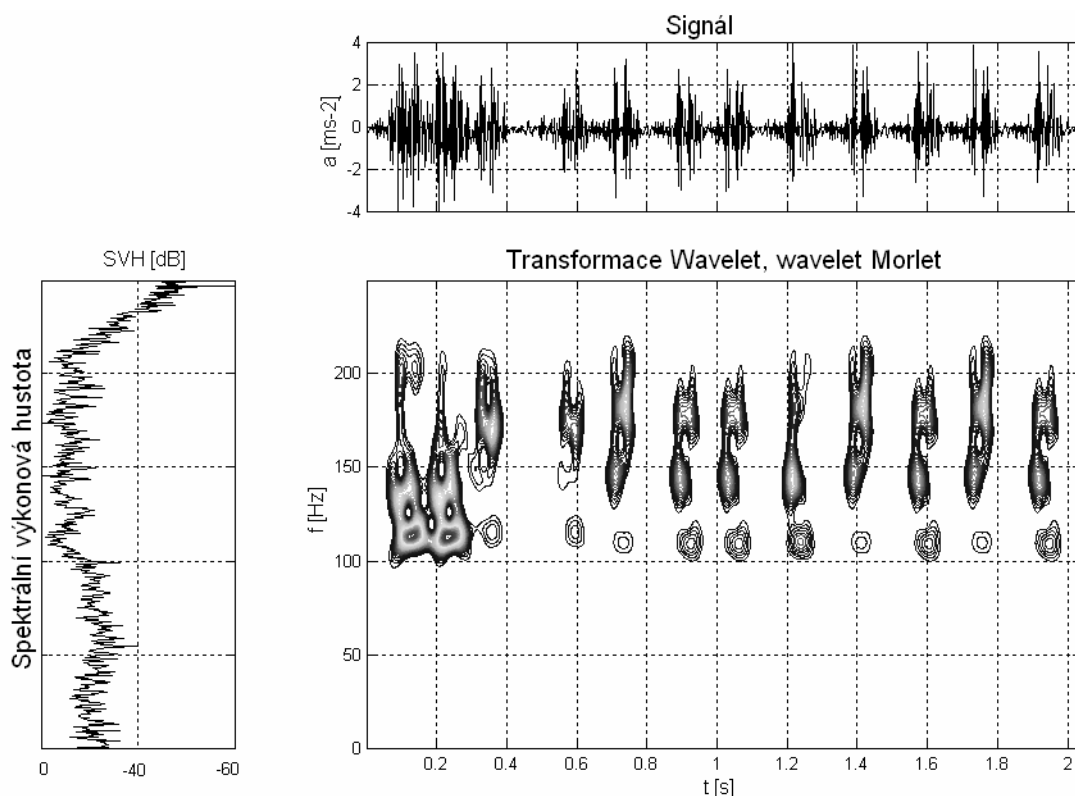
V levém horním grafu obr. 7 je zobrazen časový průběh zrychlení získaný při průjezdu tramvaje typu T3. V pravém horním grafu obr. 7 je zobrazen nevyhlazený odhad spektrální výkonové hustoty v závislosti na frekvenci (obě dvě veličiny jsou v lineárních osách). Z tohoto grafu jsou patrné tři význačné složky (550 Hz, 1,2 kHz a 1,7 kHz), které převyšují ostatní hodnoty o několik řádů. Z průběhu spektrální výkonové hustoty (dále SVH) lze vyslovit domněnku, že složky 1,2 kHz a 1,7 kHz jsou vyšší harmonické kmitočty složky 550 Hz. Logaritmické zobrazení spektrální výkonové hustoty vypočtené Welchovou metodou

v závislosti na lineárně vynesných hodnotách frekvence (levý spodní graf obr. 7) ukazují další, o dva až tři řády nižší lokální maxima SVH na frekvencích 2,3 kHz a 2,8 kHz.

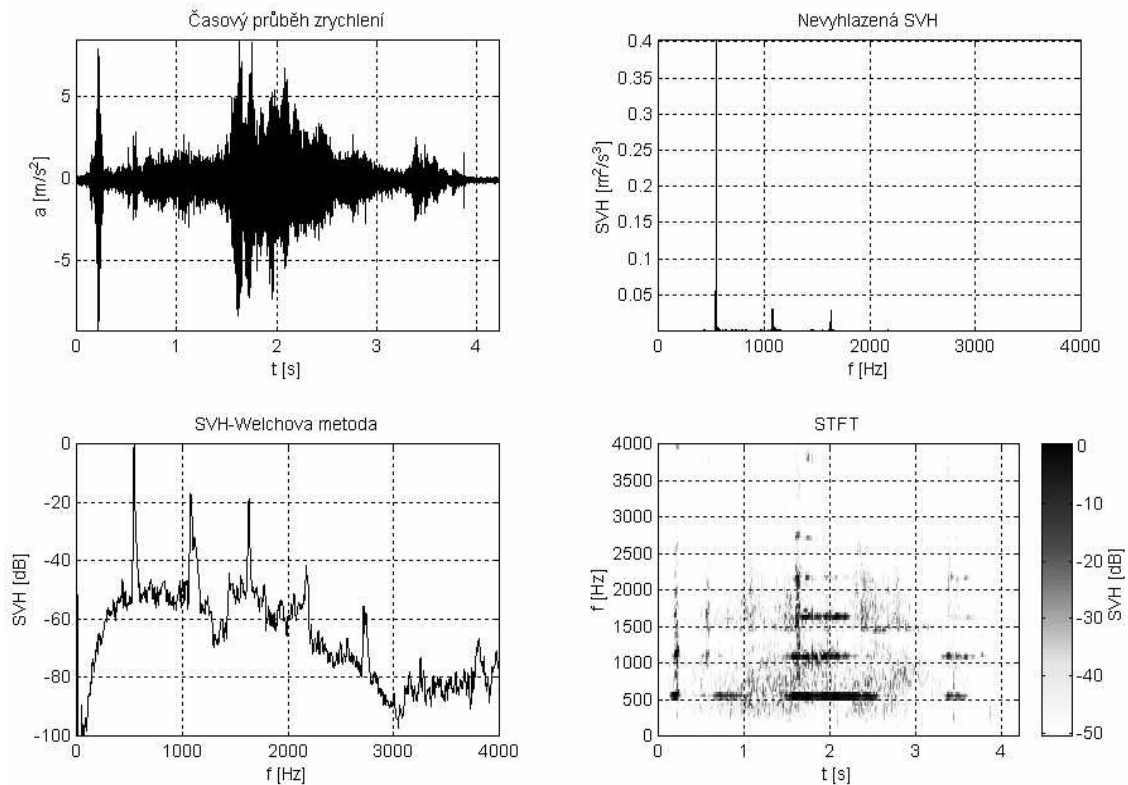
V pravém spodním grafu obr. 7 je zobrazena aplikace okénkové Fourierovy transformace na naměřený časový signál. Na vodorovné ose tohoto spektrogramu je vynesen čas, na svislé ose frekvence. Odstíny šedé barvy označují hodnotu spektrální výkonové hustoty, jak je patrné z měřítka.

Obdobně jako z předchozích průběhů SVH jsou u tohoto grafu patrné čtyři význačné frekvence (550 Hz, 1,2 kHz, 1,7 kHz a 2,3 kHz). Poznamenejme, že jako význačné hodnoty jsou brány ty, které mají útlum do 40 dB od maximální hodnoty SVH. Nejvýraznější složkou obsaženou v signálu je frekvence 550 Hz. Nabývá maximálních hodnot ve čtyřech časových intervalech (0,1 až 0,3 s, 0,6 až 1,2 s, 1,5 až 2,5 s a 3,4 až 3,6 s). Rozsah a umístění těchto intervalů je v souladu se zobrazením v časové oblasti.

Časové průběhy dalších významných složek SVH (1,2 kHz, 1,7 kHz a 2,3 kHz) rozprostřených v signálu mají obdobný charakter jako frekvence 550 Hz. Avšak u vyšších frekvencí je doba trvání maximálních hodnot SVH kratší vlivem většího útlumu. Z grafu (obr. 7 vpravo dole) je rovněž patrné, že působení těchto frekvenčních složek je dále rozčleněno při srovnání se složkou 550 Hz do dílčích intervalů.



**Obr. 6** Snímač umístěný ve šterkovém loži, časově frekvenční analýza metodou Wavelet



**Obr. 7** Časová, frekvenční a časově frekvenční analýza při průjezdu tramvaje T3 smyčkou

Na základě provedených měření a analýz lze předpokládat, že prezentované frekvenční složky jsou důsledkem existence akustických jevů vznikajících při smýkání kola po kolejnici při průjezdu tramvaje smyčkou, které je obzvláště zřetelné v případě suchého povrchu kolejnice (při styku kolo-kolejnice).

## 5. Závěr

Na základě provedených analýz naměřených signálů jak při měření odezvy na mechanický ráz, tak při reálných měřeních v terénu na železničním a tramvajovém svršku při porovnání použitých metod frekvenční a časově-frekvenční analýzy lze formulovat následující závěry a doporučení:

- Metody časově-frekvenční analýzy rozšiřují informace o daném technickém ději tím, že určují časovou lokalizaci frekvenčních složek, tj. určují velikost spektrální výkonové hustoty na jednotlivých frekvencích v příslušném časovém okamžiku.
- Z prezentovaných matematických prostředků signálové analýzy je výhodné použít pro časovou lokalizaci výskytu frekvenčních složek stacionárních a nestacionárních signálů jak lineárních (např. STFT, WT), tak i nelineárních časově frekvenčních postupů

(zejména transformací Wigner a Rihaczek)

- Krátkodobá Fourierova transformace je jedním ze základních a také (z hlediska času výpočtu) rychlých postupů pro časově-frekvenční analýzu signálů. Přesnost a vhodnost této metody závisí na volbě okénkové funkce, její velikosti a na překrytí jednotlivých segmentů. Aplikace metody vyžaduje získání určité zkušenosti pro nastavení vhodných vstupních parametrů a také pro následnou interpretaci jejího spektra.
- Transformace Wavelet je vhodná zejména k analýze a rekonstrukci různých typů nestacionárních signálů získaných například při měření vibrací a napjatosti. Tato transformace může najít uplatnění všude tam, kde se nevystačí s klasickými prostředky frekvenční analýzy signálů (tedy Fourierovou transformací), ale kde je potřeba frekvenční analýzu provádět i v závislosti na čase. Obvyklou výhodou spojitě transformace Wavelet je skutečnost, že pro různá frekvenční pásma se používají časová okénka různých šířek a že frekvenční oblast je rozdělena logaritmicky. Má však nezvyklý tvar zobrazení informací o analyzovaném signálu, neboť se blíží více vlastnostem korelační funkce, ke které je přiložena informace o funkcích vyskytujících se v daných časových okamžicích. Z tohoto důvodu je vhodné ji popisovat společně s některou další frekvenční, či časově frekvenční metodou. Snadnost interpretace výsledků metody do jisté míry závisí také na typu zvoleného matečního waveletu.
- Wignerovo spektrum představuje vhodný transformační postup, který poskytuje dobré rozlišení v časové i frekvenční oblasti. Nevýhodou, zejména při zpracování reálných signálů s velkým počtem vzorků, je časová náročnost výpočtu a nároky na relativně velkou operační i diskovou paměť počítače. Další nevýhodou se jeví nedostatečné potlačení příspěvků od křížových komponent, což se projevuje horší čitelností časově frekvenčního spektra.
- Jak k účelům testování akusticko vibračních vlastností, např. upevnění kolejnic, tak i k vyhodnocení dalších reálných měření v terénu je výhodné využít časově frekvenčních transformačních postupů z Cohenovy třídy, zejména pak transformace Rihaczek a Choi-Williams. Tyto transformace se vyznačují vysokou rozlišovací schopností v časově frekvenční rovině, což se projevuje přesnou lokalizací význačných frekvenčních komponent v čase.
- Analýza nestacionárních signálů získaných při měření vibrací s využitím časově frekvenčních metod poskytuje nový detailnější pohled na přechodové a nestacionární charakteristiky železničních a tramvajových konstrukcí. Tím poskytuje materiál pro

důkladnou analýzu těchto konstrukcí, která může být důležitá pro následnou optimalizaci stavebních a provozních podmínek. Nezanedbatelná je i skutečnost, že časově frekvenčními postupy analyzované dynamické zatížení železničních a tramvajových konstrukcí poskytuje reálné vstupy pro následné sestavení matematických modelů.

- Další významnou oblastí, kde je možné tyto moderní matematické prostředky využít, je výzkum a realizace ochranných opatření, která omezují zdroje hluku a vibrací a jejich šíření do okolí. K tomu je důležité určení jak hlavních zdrojů hluku a vibrací, tak i cest, kudy se šíří. Zásadního významu zde nabývá reálné a správné měření veličin charakterizujících hluk a vibrace a jejich následná analýza.

### **Použitá literatura**

- [1] Cohen L.: "Time-frequency distributions - a review," Proc. IEEE, vol. 77, no. 7, pp. 941-981, July 1989
- [2] Strang G.: Wavelets transform versus Fourier transform, Bulletin of the American Mathematical Society, 282-305, April 1993
- [3] Taswell C.: Wavelet transform algorithms for finite-duration discrete-time signals, ACM Transactions on Mathematical Software, September 1994
- [4] Poularikas A. D.: The Transform and Applications Handbook, IEEE Press, 1996
- [5] O'Neill J.C.: "Quadratic Functions for Time-Frequency Analysis with Applications to Signal Adaptive Kernel Design," SPIE -- Advanced Signal Processing Algorithms, 1997
- [6] O'Neill J.C., and Williams W.J.: "Distributions in the Discrete Cohen Classes", Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP, vol. 3, pp. 1581-1584, 12-15 May 1998, Seattle, WA
- [7] Pazdera L., Smutný J.: Measurement and Analysis the Construction of Tram Superstructure with Sound and Vibration Insulating Measures, International Conference – New Requirements for Material and Structures, Czech Technical University Faculty of Civil Engineering, Prague, Czech republic, 29-30 September 1998, pp. 315-318, ISBN 80-01-01838-5
- [8] Smutný J., Pazdera L.: Modern methods of noise and vibration analysis applied to rail transport, International Scientific Conference of Slovakian Technical University – section of engineering construction and a traffic structure, Slovakian Technical University, Bratislava, Slovak republic, 11/1998, pp. 355-360, ISBN 80-227-1129-2

## **Poděkování**

Příspěvek byl vypracován za podpory výzkumného záměru MŠMT,  
registrační číslo CEZ: J22/98:261100007.

V Brně, září 1999

Lektoroval: Ing. Josef Turek, CSc.

Komerční železniční výzkum, s.r.o.

Praha