

Doc. Ing. Karel Hlava, CSc.  
Ing. Radovan Doleček, Ph.D.<sup>1</sup>

## Připnutí LC větví FKZ k přípojnici 27 kV trakční napájecí stanice

*Klíčová slova: trakční proudová soustava 25 kV, 50 Hz; filtračně kompenzační zařízení; přechodný jev připnutí LC větve k napětí*

### Úvod

Filtračně-kompenzační zařízení (FKZ) se používá pro zlepšení účinnosti trakčního odběru způsobeného diodovým trakčním měničem hnacích vozidel a pro omezení průniku harmonických proudů do napájecí sítě 110 kV.

### Odvození výchozích rovnic

Předmětem analýzy je vyšetření přechodného jevu vznikajícího při připojení LC větví k trakčnímu napětí.

Platí výchozí diferenciální rovnice ve tvaru

$$R_{LC}i_{LC} + L_{LC}\frac{di_{LC}}{dt} + \frac{1}{C_{LC}}\int i_{LC}dt = U_{TV,MAX}\sin(\omega t + \psi) \quad (1)$$

kde  $R_{LC}, L_{LC}, C_{LC}$  jsou prvky LC větve FKZ  
 $U_{TV,MAX}$  je amplituda trakčního napětí  
 $\omega$  kruhová frekvence trakčního napětí ( $\omega = 100 \pi$ )  
 $\psi$  fáze, ve které je trakční napětí připojeno

Po derivování dostaneme nehomogenní diferenciální rovnici s pravou stranou

$$L_{LC}\frac{d^2i_{LC}}{dt^2} + R_{LC}\frac{di_{LC}}{dt} + \frac{i_{LC}}{C_{LC}} = \omega U_{TV,MAX}\cos(\omega t + \psi) \quad (2)$$

Obecný integrál této nehomogenní rovnice se skládá ze součtu obecného integrálu homogenní rovnice (bez pravé strany) a partikulárního integrálu rovnice nehomogenní (úplné). Dostaneme výraz

---

<sup>1</sup> **Doc. Ing. Karel Hlava, CSc.**, 1930, absolvent ČVUT FEL obor elektrická trakce, r. 1953, vědecký pracovník (ČD VÚŽ, TÚDC, SŽE), nyní docent katedry elektrotechniky, elektroniky a zabezpečovací techniky Dopravní fakulty Jana Pernera Univerzity Pardubice.

**Ing. Radovan Doleček**, 1971, absolvent Dopravní fakulty Jana Pernera Univerzity Pardubice, obor Dopravní infrastruktura- elektrotechnika, specializace Elektrická trakční zařízení, r. 1999, nyní interní postgraduální doktorské studium na DFJP UPa KEEZ v tématice Pevná trakční zařízení.

$$i_{LC}(t) = I_{LC,MAX} \sin(\omega t + \psi - \varphi_{LC}) + \exp(-\beta t) [K_1 \cos(\omega_{LC} t) + K_2 \sin(\omega_{LC} t)] \quad (3)$$

kde:

⇒ první člen představuje ustálenou složku proudu LC větve,

⇒ druhý člen pak přechodovou složku proudu LC větve během přechodného jevu.

$$I_{LC,MAX} = \frac{U_{TV,MAX}}{Z_{LC}} \quad \text{je amplituda ustáleného proudu} \quad (4)$$

$$Z_{LC} = \sqrt{R_{LC}^2 + \left( \omega L_{LC} - \frac{1}{\omega C_{LC}} \right)^2} \quad (5)$$

$$\varphi_{LC} = \arctg \frac{\omega L_{LC} - \frac{1}{\omega C_{LC}}}{R_{LC}} \quad (6)$$

$$\beta = \frac{R_{LC}}{2L_{LC}} \quad \text{je činitel tlumení} \quad (7)$$

$$\omega_{LC} = \sqrt{\frac{1}{L_{LC} C_{LC}} - \beta^2} = 100\pi n_R \quad \text{je vlastní kruhová frekvence větve L-C} \quad (8)$$

$$n_R = \frac{f_{LC}}{50} \quad \text{kde } f_{LC} \text{ je rezonanční frekvence LC větve vztažená na 50 Hz} \quad (9)$$

Integrační konstanty  $K_1$  a  $K_2$  určíme z počátečních podmínek pro  $t = 0$ , které formulujeme takto:

⇒ pro  $t = 0$  bude  $i_{LC} = 0$

⇒ pro  $t = 0$  bude  $u_{LC} = 0$

Z první podmínky plyne pro  $K_1$

$$K_1 = -I_{LC,MAX} \sin(\psi - \varphi_{LC}) \quad (10)$$

Druhá podmínka vyžaduje integrovat rovnici (3), dosadit z rovnice (10) a položit  $t = 0$ . Dostaneme

$$K_2 = \frac{I_{LC,MAX}}{\omega_{LC}} \left[ \beta \sin(\psi - \varphi_{LC}) - \frac{\beta^2 + \omega_{LC}^2}{\omega} \cos(\psi - \varphi_{LC}) \right] \quad (11)$$

Časový průběh proudu větve L-C po jejím připojení na trakční napětí je dán výrazem

$$\frac{i_{LC}(t)}{I_{LC,MAX}} = \sin(\omega t + \psi - \varphi_{LC}) + \exp(-\beta t) \left\{ \sin(\omega_{LC} t) \left[ \frac{\beta}{\omega_{LC}} \sin(\psi - \varphi_{LC}) - \frac{\beta^2 + \omega_{LC}^2}{\omega_{LC} \omega} \cos(\psi - \varphi_{LC}) \right] - \cos(\omega_{LC} t) \sin(\psi - \varphi_{LC}) \right\} \quad (12)$$

Tento obecně platný výraz je možno pro další analýzu podstatně zjednodušit bez znatelné výpočetní chyby použitím následujících předpokladů:

- oprávněně lze přijmout, že k prvnímu průchodu proudu LC větví dojde přeskokem mezi kontakty vypínače v okamžiku, kdy napětí TV bude dosahovat své vrcholové hodnoty, že tedy bude platit

$$\psi \cong \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

- pro obvyklé parametry prvků LC větví platí, že ohmická složka impedance LC větve pro základní kmitočet 50 Hz je zanedbatelná proti složce imaginární, pak platí

$$\varphi_{LC} \cong \frac{\pi}{2} \quad (14)$$

- z téhož předpokladu dále vyplývá pro  $Z_{LC}$  výraz

$$Z_{LC} \cong \omega L_{LC} - \frac{1}{\omega C_{LC}} = \frac{1}{100\pi C_{LC}} \cdot \frac{n_R^2 - 1}{n_R^2} \quad (15)$$

- pro ohmický odpor rezonanční tlumivky platí přibližný výraz

$$R_{LC} \cong \frac{\omega L_{LC}}{30} \quad (16)$$

z čehož plyne pro konstantu tlumení hodnota nezávislá na ladění LC větve

$$\beta \cong \frac{\omega}{60} = 5,236 \quad (17)$$

- čtverec hodnoty tlumení  $\beta^2$  je číselně zanedbatelný vůči hodnotě čtverci kruhové rezonanční frekvence LC větve  $\omega_{LC}^2$ .

Za těchto předpokladů lze napsat zjednodušený výraz pro okamžitou hodnotu proudu LC větve FKZ ve tvaru

$$i_{LC}(t) \cong I_{LC,MAX} \cdot [\sin(\omega \cdot t) - \exp(-\beta \cdot t) \cdot n_R \cdot \sin(n_R \cdot \omega \cdot t)] \quad (18)$$

Z tohoto výrazu lze odvodit závažné poznatky:

- poměr  $i_{LC}(t)/I_{LC,MAX}$  závisí pouze na naladění LC větve dané hodnotou  $n_R$ , protože jak  $\omega$  tak  $\beta$  jsou konstanty,
- v prvních okamžicích po připnutí LC větve (až na celkem malý útlum) je amplituda superposice přechodné složky proudu LC větve  $n_R$ -krát větší než amplituda složky ustálené.

Dílčím úkolem je výpočet extrémních hodnot proudu  $i_{LC}(t_{EXTR})$ , které nastanou v jednotlivých okamžicích  $t_{EXTR}$ . Početně bychom daný úkol řešili derivací výrazu (18) podle času a položením této derivace rovnou nule. Výsledná transcendentní rovnice by byla zbytečně složitá, a proto přijmeme zjednodušení výrazu (17) spočívající ve vynechání prvku  $\exp(-\beta \cdot t)$ . Vzhledem k výše odvozené číselné hodnotě  $\beta \approx 5,236$  se tímto postupem dopustíme ve stanovení  $t_{EXTR}$  pro hodnoty  $t_{EXTR} \leq 10 \text{ ms}$  chyby cca 5 %. Dále využijeme vztahu

$$\omega_{LC} = n_R \cdot \omega \quad (19)$$

Derivováním výrazu (18) s použitím uvedeného zjednodušení dostaneme jednoduchou goniometrickou rovnici

$$\cos(\omega \cdot t_{EXTR}) = n_R^2 \cdot \cos(n_R \cdot \omega \cdot t_{EXTR}) \quad (20)$$

Také hodnota  $t_{EXTR}$  závisí pouze na naladění LC větve daném hodnotou  $n_R$ .

Časový průběh napětí na kondenzátorové skupině LC větve  $u_{C,LC}(t)$  lze odvodit z časového průběhu proudu LC větve  $i_{LC}(t)$  pomocí výrazu

$$u_{C,LC}(t) = \frac{1}{C_{LC}} \cdot \int i_{LC}(t) \cdot dt \quad (21)$$

Úplný výraz pro  $u_{C,LC}(t)$  platný pro obecný okamžik připnutí napětí TV má tvar

$$\frac{u_{C,LC}(t)}{U_{C,LC,MAX}} = -\cos(\omega t + \psi - \varphi_{LC}) + \exp(-\beta t) \cdot \left\{ \sin(\omega_{LC} t) \left[ \frac{\beta \cos(\psi - \varphi_{LC})}{\omega_{LC}} - \frac{\omega}{\omega_{LC}} \sin(\psi - \varphi_{LC}) \right] + \cos(\omega_{LC} t) \cos(\psi - \varphi_{LC}) \right\} \quad (22)$$

Při aplikaci tohoto výrazu použijeme stejné zjednodušující předpoklady jako pro odvození  $i_{LC}(t)$  a dostaneme pro  $u_{C,LC}(t)$  jednodušší výraz

$$u_{C,LC}(t) \approx U_{C,LC,MAX} \cdot \left\{ -\cos(\omega \cdot t) + \exp(-\beta \cdot t) \cdot \left[ \frac{\beta}{\omega_{LC}} \sin(\omega_{LC} \cdot t) + \cos(\omega_{LC} \cdot t) \right] \right\} \quad (23)$$

$$\text{kde } U_{C,LC,MAX} = \frac{I_{LC,MAX}}{\omega \cdot C_{LC}} = \frac{U_{TV,MAX}}{\omega \cdot C_{LC} \cdot Z_{LC}} \quad (24)$$

Časový průběh napětí na kondenzátorové skupině během přechodného jevu připínání k trolejovému napětí vyjádřený poměrem  $u_{C,LC}(t)/U_{C,LC,MAX}$  také závisí pouze na naladění LC větve, protože platí  $\omega_{LC} = n_R \cdot \omega$  a  $\beta$  i  $\omega$  jsou konstanty.

Goniometrická rovnice pro výpočet časových okamžiků  $t_{EXTR,C}$ , kdy dojde k extrémní hodnotě napětí na kondenzátorové skupině, má tvar

$$\omega \cdot \sin(\omega \cdot t_{EXTR,C}) + \beta \cdot \cos(\omega_{LC} \cdot t_{EXTR,C}) = \omega_{LC} \cdot \sin(\omega_{LC} \cdot t_{EXTR,C}) \quad (25)$$

Také tento výraz pro výpočet okamžiku extrému  $u_{C,LC}(t_{EXTR,C})$  závisí pouze na naladění LC větve ( $n_R$ ) a na jejím útlumu  $\beta$ .

### Číselný příklad

#### *Vstupní údaje:*

- ladění větve 3. harmonické  $n_{R,3} = 2,95$
- kapacita kondenzátorů větve 3. harmonické  $C_{LC,3} = 10,21 \mu\text{F}$
- indukčnost rezonanční tlumivky 3. harmonické  $L_{LC,3} = 0,114 \text{ H}$
- ladění větve 5. harmonické  $n_{R,5} = 5,00$
- kapacita kondenzátorů větve 5. harmonické  $C_{LC,5} = 3,47 \mu\text{F}$
- indukčnost rezonanční tlumivky 5. harmonické  $L_{LC,5} = 0,1168 \text{ H}$
- napětí TV  $U_{TV} = 27500 \text{ V}$

#### *Výpočet časového průběhu proudu LC větve 3. harmonické*

Budeme analyzovat nejhorší případ, tj. připojení LC větve 3. harmonické k trolejovému napětí v okamžiku jeho maxima.

Časový průběh proudu  $i_{LC,3}(t)$  je dán upraveným výrazem (18)

$$i_{LC,3}(t) \cong I_{LC,MAX,3} \cdot [\sin(\omega \cdot t) - \exp(-\beta \cdot t) \cdot n_{R,3} \cdot \sin(\omega_{LC,3} \cdot t)]$$

kde pro zadané parametry příkladu platí dále:

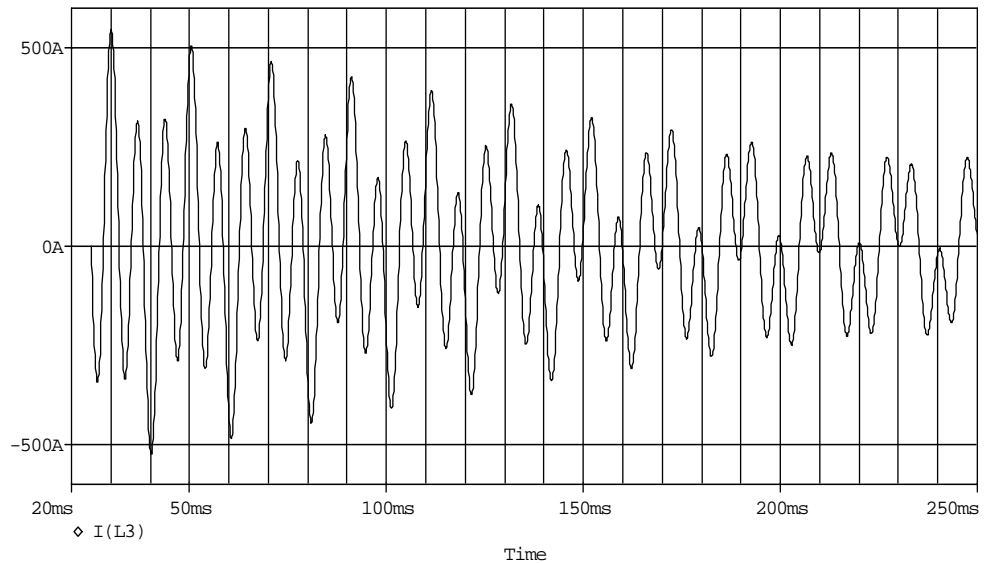
$$I_{LC,MAX,3} = 140,9 \text{ A}$$

$$\omega_{LC,3} = 926,8$$

Ukázka časového průběhu  $i_{LC,3}(t)$  je na **obrázku 1**.

Extrémní hodnoty tohoto proudu nastávají v časových okamžicích  $t_{EXTR}$ , které lze určit řešením rovnice (20). Dostaneme postupně hodnoty podle této tabulky, kde jsou zároveň uvedeny hodnoty poměru  $i_{LC,3}(t_{EXTR})/I_{LC,MAX,3}$  i odpovídající extrémní hodnoty proudu LC větve 3. harmonické  $i_{LC,MAX,3} [\text{A}]$ :

Pořadové číslo extrému	$t_{EXTR} [\text{ms}]$	$ i_{LC,3}(t_{EXTR})/I_{LC,MAX,3} $	$ i_{LC,MAX,3}  [\text{A}]$
1	1,59	2,438	342,8
2	5,08	3,872	545,6
3	8,59	2,376	334,7
4	11,76	2,236	315,0
5	15,24	3,721	524,2

**Obrázek 1 - časový průběh proudu LC větve 3. harmonické**

***Výpočet časového průběhu proudu LC větve 5. harmonické***

Opět použijeme výraz (20) a ze vstupních parametrů dostáváme:

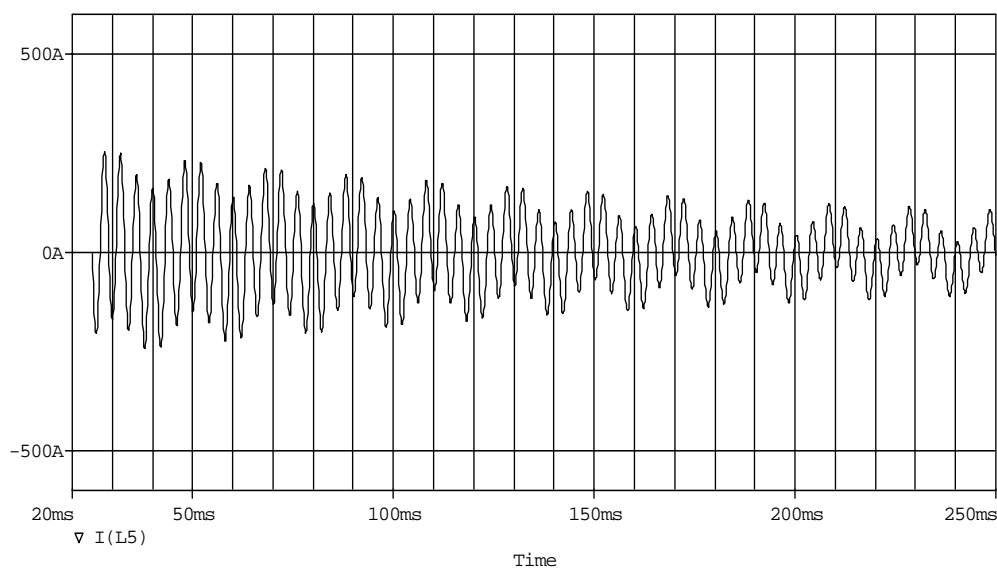
$$I_{LC,MAX,5} = 44,16 \text{ A}$$

$$\omega_{LC,5} = 1570,8$$

Ukázka časového průběhu  $i_{LC,5}(t)$  je na **obrázku 2**.

Pro extrémní hodnoty proudu a jejich okamžiky vzniku platí tabulka:

Pořadové číslo extrému	$t_{EXTR}$ [ms]	$ i_{LC,5}(t_{EXTR})/I_{LC,MAX,5} $	$ i_{LC,MAX,5} $ [A]
1	0,973	4,669	206,19
2	3,013	5,732	253,13
3	5,00	3,871	170,94
4	6,99	5,631	248,66
5	9,02	4,464	197,12

**Obrázek 2 - časový průběh proudu LC větve 5. harmonické**

**Výpočet časového průběhu celkového proudu obou LC větví FKZ**

Rovnice pro časový průběh celkového proudu FKZ  $i_{LC,CELK}(t_{EXTR})$  je dán součtem dílčích proudů podle výrazu (18) použitého pro obě sledované harmonické.

Výraz pro výpočet okamžiků vzniku extrémních hodnot tohoto celkového proudu také je dán výrazem (20) aplikovaném v součtu pro obě sledované harmonické a řešeném pro hledané okamžiky jako celek.

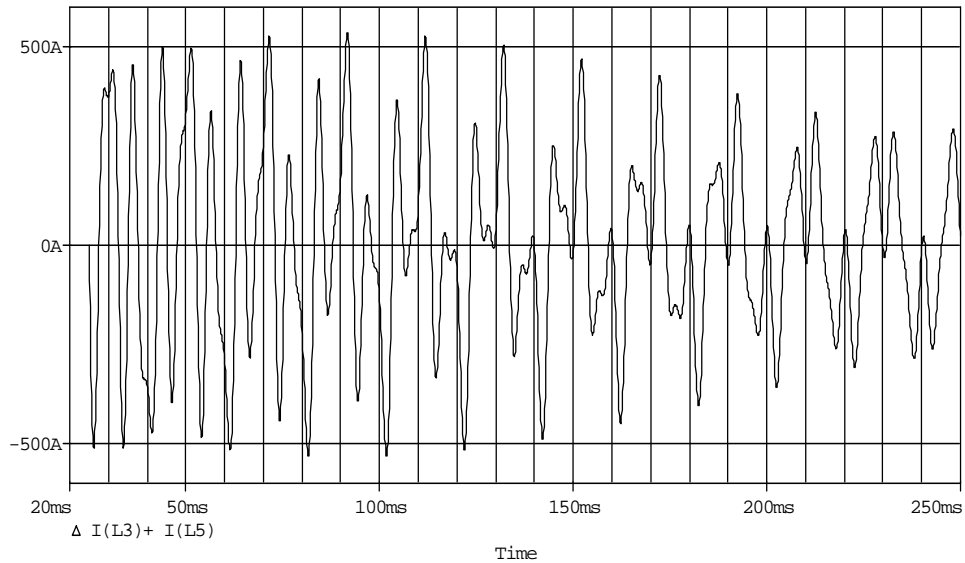
Jedná se zde pak o výraz

$$I_{LC,MAX,3} \cdot (\cos(\omega \cdot t_{EXTR}) - 2,95^2 \cdot \cos(2,95 \cdot \omega \cdot t_{EXTR})) + \\ + I_{LC,MAX,5} \cdot (\cos(\omega \cdot t_{EXTR}) - 5^2 \cdot \cos(5 \cdot \omega \cdot t_{EXTR})) = 0$$

Ukázka časového průběhu  $i_{LC,CELK}(t)$  je na **obrázku 3**.

Vypočtené hodnoty  $t_{EXTR}$  a  $i_{LC,CELK}(t_{EXTR})$  jsou uvedeny na následující tabulce:

Pořadové číslo extrému	$t_{EXTR}$ [ms]	$ i_{LC,CELK}(t_{EXTR}) $ [A]
1	1,211	510,93
2	3,983	394,15
3	6,135	444,85
4	8,855	512,62
5	11,277	451,66

**Obrázek 3 - časový průběh celkového proudu obou LC větví FKZ**


**Výpočet časového průběhu napětí na kondenzátorové skupině  
LC větve 3. harmonické**

Časový průběh napětí  $u_{C,LC,3}(t)$  je dán upraveným výrazem (23)

$$u_{C,LC,3}(t) \cong U_{C,LC,MAX,3} \cdot \left\{ -\cos(\omega \cdot t) + \exp(-\beta \cdot t) \cdot \left[ \frac{\beta}{\omega_{LC,3}} \sin(\omega_{LC,3} \cdot t) + \cos(\omega_{LC,3} \cdot t) \right] \right\}$$

kde pro zadané parametry příkladu platí dále:

$$U_{C,LC,MAX,3} = 43938 \text{ V}$$

$$\omega_{LC,3} = 926,8$$

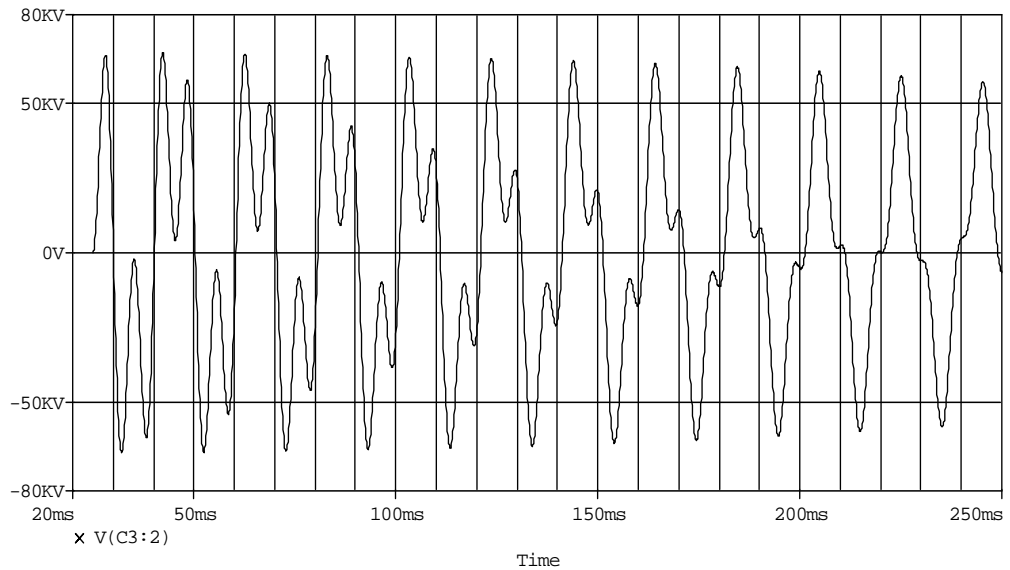
Ukázka časového průběhu  $u_{C,LC,3}(t)$  je na **obrázku 4**.

Extrémní hodnoty tohoto napětí nastávají v časových okamžicích  $t_{EXTR}$ , které lze určit řešením rovnice (25). Dostaneme postupně hodnoty podle této tabulky, kde jsou zároveň uvedeny hodnoty poměru  $u_{C,LC,3}(t_{EXTR})/U_{C,LC,MAX,3}$  i odpovídající extrémní hodnoty napětí na kondenzátorové skupině LC větve 3. harmonické  $u_{C,LC,MAX,3} [V]$ :

Pořadové číslo extrému	$t_{EXTR}$ [ms]	$ u_{C,LC,3}(t_{EXTR})/U_{C,LC,MAX,3} $	$ u_{C,LC,MAX,3}  [V]$
1	3,09	1,509	66320
2	7,08	1,536	67484
3	10,20	0,050	2208,2
4	13,25	1,416	62218
5	17,24	1,529	67180



**Obrázek 4 - časový průběh napětí na kondenzátorové skupině LC větve 3. harmonické**



**Výpočet časového průběhu napětí na kondenzátorové skupině LC větve 5. harmonické**

Časový průběh napětí  $u_{C,LC,5}(t)$  je dán upraveným výrazem (23)

$$u_{C,LC,5}(t) \cong U_{C,LC,MAX,5} \cdot \left\{ -\cos(\omega \cdot t) + \exp(-\beta \cdot t) \cdot \left[ \frac{\beta}{\omega_{LC,5}} \sin(\omega_{LC,5} \cdot t) + \cos(\omega_{LC,5} \cdot t) \right] \right\}$$

kde pro zadané parametry příkladu platí dále:

$$U_{C,LC,MAX,5} = 40511 \text{ V}$$

$$\omega_{LC,5} = 1570,8$$

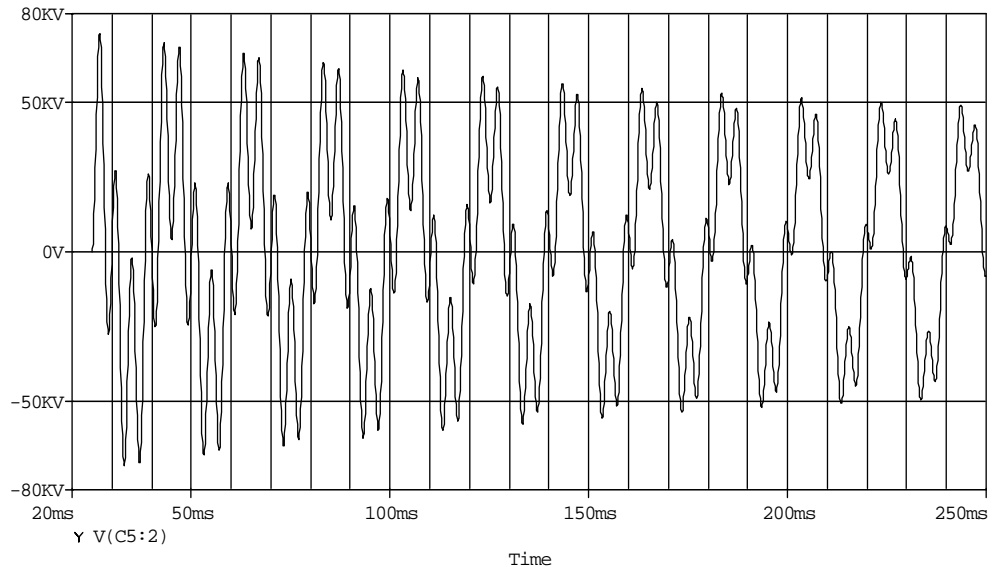
Ukázka časového průběhu  $u_{C,LC,5}(t)$  je na **obrázku 5**.

Extrémní hodnoty tohoto napětí nastávají v časových okamžicích  $t_{EXTR}$ , které lze určit řešením rovnice (25). Dostaneme postupně hodnoty podle této tabulky, kde jsou zároveň uvedeny hodnoty poměru  $u_{C,LC,5}(t_{EXTR})/U_{C,LC,MAX,5}$  i odpovídající extrémní hodnoty napětí na kondenzátorové skupině LC větve 3. harmonické  $u_{C,LC,MAX,5} [V]$ :

Pořadové číslo extrému	$t_{EXTR}$ [ms]	$ u_{C,LC,5}(t_{EXTR})/U_{C,LC,MAX,5} $	$ u_{C,LC,MAX,5}  [V]$
1	1,929	1,805	73137
2	4,125	0,689	27913
3	5,879	0,679	27506

4	8,075	1,775	7106
5	10,002	0,051	2067

**Obrázek 5 - časový průběh napětí na kondenzátorové skupině LC větve 5. harmonické**



### **Závěr**

Analytický výpočet a navazující konkrétní číselný příklad ukazují, že přechodný jev následující po připojení LC větve filtračně kompenzačního zařízení k trakčnímu napětí se projeví jak v proudu LC větve, tak i v napětí na kondenzátorové skupině LC větve dočasným zvýšením hodnot vůči hodnotám ustáleným.

Jako nejzávažnější se jeví stav, kdy k připojení LC větví dojde v okamžiku, kdy trakční napětí dosahuje své amplitudové hodnoty.

Útlum přechodného jevu je v konkrétních podmínkách číselného příkladu velmi pozvolný, takže lze očekávat jeho pokles až za přibližně několik desítek period základní složky.

Tabulky podávají informaci o okamžicích vzniku extrémních hodnot  $t_{\text{EXTR}}$  především proudu v obou LC větvích, vyjádřených součinitelem  $i_{\text{LC}}(t_{\text{EXTR}})/I_{\text{LC,MAX}}$ . Podobné údaje jsou v tabulkách obsaženy i pro napětí na kondenzátorové skupině LC větve.

### **Literatura:**

Hlava K.: Elektromagnetická kompatibilita (EMC) drážních zařízení  
Skriptum Univerzity Pardubice, 2004

Doleček R.: Přechodné jevy v napájecích stanicích ČD 25 kV, 50 Hz  
Doktorská disertační práce, Univerzita Pardubice, 2006



V Praze, listopad 2006

Lektoroval: Ing. Vladivoj Výkruta  
Elektrizace železnic